

Vehid Kurtić**Naida Bikić****Dževad Burgić**

UTICAJ MATEMATIČKOG MODELIRANJA NA MOTIVACIJU I USPJEŠNOST U NASTAVI MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sažetak

Cilj ovog rada je prikazati uticaj matematičkog modeliranja kao metoda rada na motivisanost i uspjeh učenika u nastavi matematike. U svrhu istraživanja formirana je eksperimentalna grupa (N=36) učenika podijeljena u tri odjeljenja sa temama: linearna, kvadratna i logaritamska funkcija. U periodu od 6 sedmica učenici gimnazija i tehničkih škola Zeničko-dobojskog kantona su imali priliku izučavati navedene funkcije matematičkim modeliranjem. Časovi su realizirani nastavom na daljinu, pomoću: grafičkog tableta za pisanje (HUION), PDF Annotator, Google Workspace, ZOOM, GeoGebra, Wolfram Mathematica, Quizizz, MSOffice, WordWall. Cilj istraživanja je bio ispitati stavove učenika o matematičkom modeliranju u nastavi matematike i pokazati uticaj matematičkog modeliranja na efikasnost nastave matematike kod proučavanja funkcija i njihovih osobina. Rezultati testova, ispitivanja, anketa, upitnika dovode do zaključka da je primjena matematičkog modeliranja kao načina izučavanja i ispitivanja funkcija značajno efikasniji u odnosu na tradicionalnu nastavu matematike. Učesnici programa su imali pozitivne stavove i mišljenja o modeliranju u nastavi matematike a pokazao se i uticaj motivacije na uspješnost učenika u nastavi matematike. Integracija matematičkog modeliranja u nastavi matematike bi bila od izuzetnog značaja za akademski razvoj učenika, za shvatanje i razumijevanje suštine usvojenog znanja, za kvalitetnije razmišljanje i razvijanje kritičkog mišljenja.

Ključne riječi: matematičko modeliranje, matematika, modeliranje, motivacija, nastava matematike, primijenjena matematika, uspješnost

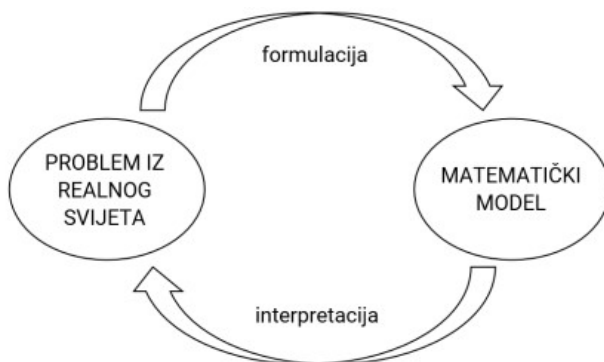
Uvod

Jedan od najvažnijih izazova nastavnika danas jeste motivisati učenika. S obzirom na ubrzan razvoj tehnologija i sve veću zasićenost informacijama obrazovni sistem se mora izboriti za održivost vrijednosti zasnovanih na odgoju, obrazovanju i naučnim postignućima.

Cilj obrazovanja je odgojiti pojedince koji uče i kako da uče, pronalaze nove informacije i koriste ih u svom životu, prilagođavaju se promjenama u društvu, a istovremeno postaju izvor ovih promjena. Da bi stekli ove osobine pojedinci moraju biti spremni da učestvuju u procesu učenja, odnosno moraju biti motivisani i efikasno koristiti strategije učenja jer razine motivacije učenika i njihovo korištenje strategija učenja efektivno utiču na njihov sadašnji i budući uspjeh.

Matematičko modeliranje je postupak koji koristi matematiku za predstavljanje, analizu, predviđanje ili na drugi način pruža uvid u fenomene stvarnoga svijeta. Razmotrimo kako tu priču možemo uvesti u svoje učionice. Odgovor na modeliranje može biti mnogo zahtjevniji od pukog ispravljanja testova, s jasnim ciljem jednog određenog odgovora na zadani problem. Ispunjavanje ovog izazova može učenicima pružiti značajne povratne informacije o mnogim područjima njihovog akademskog razvoja. U ovom slučaju se od učenika traži da objasne svoje razmišljanje. Cilj matematičkog modeliranja je da se problem u nekom kontekstu opiše na matematički način. To je jedan ciklički proces u kojem povezujemo matematički model sa procesom ili pojavom. Mnogi matematičko modeliranje smatraju izazovnim iz razloga što pretpostavlja poznavanje

matematičkih procesa, alata i tehnika baš kao i kritičko mišljenje o modelu. Takvi izazovi mogu imati višestruke koristi u podučavanju i veliki potencijal doprinosa razvoju kritičkog mišljenja kod učenika. Botoš u svom radu modeliranje prikazuje na sličan način.



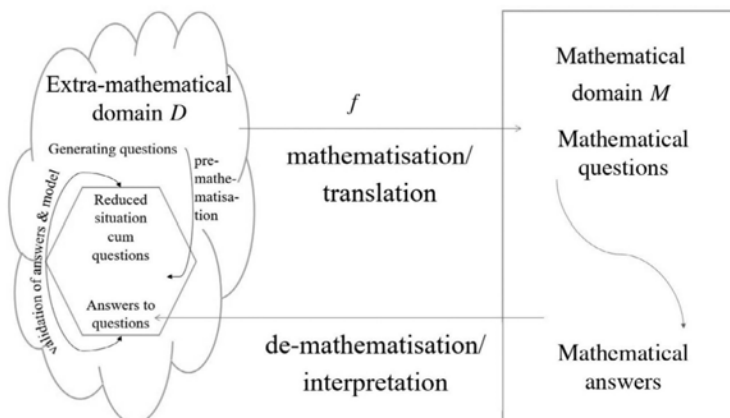
Slika 1 Modeliranje (Botoš, 2014)

Što je više veza među varijablama poznato, to će model biti precizniji. Zato je ponekad korisno u model ugraditi selektivne informacije na temelju intuicije, iskustva, stručnog mišljenja ili uvjerljivosti matematičkog izraza. Što je više varijabli i veza među njima obuhvaćeno modelom, to je model složeniji i njegova upotreba je manje jednostavna. Složeniji modeli su često precizniji od jednostavnih, stoga je potrebno odrediti željenu tačnost modela i tako odabrati nivo složenosti. Gdje god je to moguće, treba koristiti jednostavnija rješenja.

Autor Magdić (2014) govori o tipovima matematičkih modela, te navodi sljedeće:

1. Linearni i nelinearni;
2. Deterministički i stohastički;
3. Statički i dinamički;
4. Diskretni i kontinuirani;
5. Deduktivni, induktivni i tzv. "plivajući".

Matematičko modeliranje predstavlja put od realne situacije do matematičkog problema, rješavanje matematičkog problema, analiza dobijenih rezultata i konačno rješenje polaznog stvarnog problema, kao što je prikazano na Slici 2.



Slika 2 Proces modeliranja (Niss & Blum, 2020)

Autori Niss i Blum (2020) navode dva različita razloga za uključivanje matematičkog modeliranja kao značajne komponente nastave i učenja matematike na svim nivoima obrazovanja.

Prvi razlog je činjenica da matematika igra izuzetno važnu ulogu u razumijevanju i ophođenju sa svijetom oko nas. Kako je ova uloga ostvarena putem matematičkog modeliranja, omogućavajući ljudima da matematiku koju su naučili i razumiju stave u različite nematematičke kontekste i situacije. Drugi razlog je korištenje modeliranja kao sredstva za nešto drugo, prije svega za podršku učenju matematike, nudeći motivaciju za njeno proučavanje, kao i tumačenje, značenje, pravilno razumijevanje i održivo zadržavanje njenih koncepata, rezultata, metoda i teorija. i istovremeno unapređivanje značajnih matematičkih kompetencija kao što su rješavanje problema i zaključivanje. (Niss & Blum, 2020)

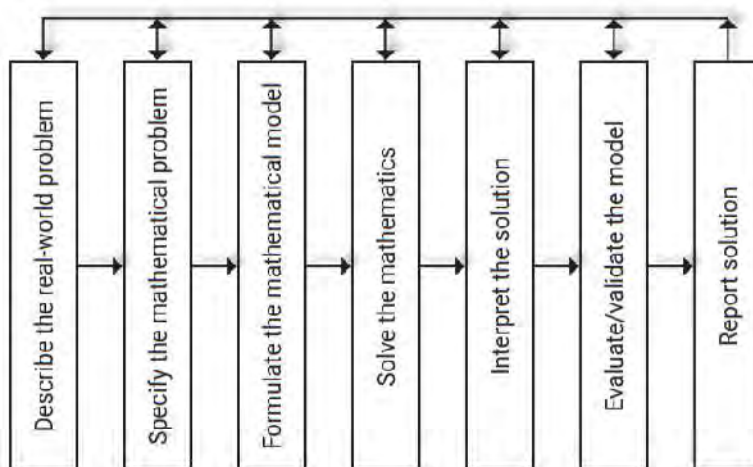
Sistem obrazovanja bi trebao da djeluje pod strogom pretpostavkom da je matematika svuda oko nas. Izazov je prepoznati njeno prisustvo, pristupiti mu na pravi način i produktivno ga primijeniti gdje je to moguće. Cilj modeliranja bi trebao prema Galbraith i Holton (2018) biti taj da se kod učenika:

- razvije sistematičan i uspješan pristup rješavanju pojedinačnih problema smještenim u stvarnom životu i
- omogući efektivno rješavanje izazova koje nosi moderni svijet.

Koraci matematičkog modeliranja se mogu podijeliti na one prije i one poslije aktivnog uvođenja matematičkog modeliranja u nastavu. Prvi dio bi mogao biti sadržan od sljedećih koraka:

- (1) Analiza kurikuluma, nastavnih planova i programa matematike.
- (2) Dopuna kurikuluma oblastima matematičkog modeliranja.
- (3) Pronalazak ili kreiranje odgovarajuće literature.
- (4) Edukacija nastavnika za rad u okvirima modeliranja.

Drugi dio se odnosi na implementaciju matematičkog modeliranja u nastavi, autori Galbraith i Holton (2018) detaljno opisuju korake modeliranja kroz: opis, specificiranje, formulaciju, rješenje, interpretaciju problema, procjenu modela i izvještaj o uspjehu modela.



Slika 3 Okvir matematičkog modeliranja (Galbraith & Holton, 2018, str. 6)

Apatić (2016) navodi četiri pristupa matematičkom modeliranju:

- Empirijski pristup;
- Teorijski pristup;
- Simulacijski pristup;
- Dimenzijski pristup.

Veoma važno je učenike pripremiti za modeliranje. Ako se radi npr. modeliranje logaritamskom funkcijom onda bi se trebali u jedan ili dva nastavna sata prisjetiti osobina eksponencijalne i

logaritamske funkcije. Na taj način bi se proizveo ugodan ambijent za modeliranje. Sve su to detalji koji se pomno planiraju, a sve zbog uspješne realizacije eksperimenta. Kada dode do pokretanja procesa modeliranja nastavnik je taj koji i tada konstantno mora biti uključen. Učenicima je nerijetko potrebna pomoć u razumijevanju problema, a posebno kod rješavanja problema matematičkog modeliranja. Ako se primijeti neusklađenost ili slaba koordinacija u grupi pregrupisavanje je postupak koji nužno slijedi. Naravno, očekivano je da će reakcija pojedinih razreda ili grupa u razredu biti drugačija. Neki će brže da shvate način rada pa će i njihovi rezultati očekivano biti bolji. Idealno bi bilo da se zadaci modeliranja vežu za lokalne kompanije, škole, fakultete, biznise, uspješne sportiste, glumce, itd. Na taj način bi se sigurno postigao značajno bolji efekat po pitanju motivisanosti učenika. U nastavku navodimo kriterije za uvođenje zadataka modeliranja u nastavu matematike.

Tabela 1. *Katalog kriterija za zadatke modeliranja*
(Siller & Greefrath, 2020; Wess & Greefrath, 2019)

Kriterij	Specifikacija
<i>Veza sa stvarnošću</i>	Definicija problema ima nematematičku činjeničnu reference.
<i>Relevantnost</i>	Učenici smatraju da je definicija problema zanimljiva, usko povezana ili relevantna za njihov svakodnevni život.
<i>Autentičnost</i>	Definicija problema je autentična u pogledu nematematičkog aspekta. Definicija problema je autentična u pogledu upotrebe matematike u konkretnoj situaciji.
<i>Otvorenost</i>	Definicija problema dozvoljava različita rješenja. Definicija problema dozvoljava pristupe različitih nivoa.
<i>Promovisanje podkompetencija</i>	Definicija problema promovira kognitivne elemente u obliku parcijalnih kompetencija matematičkog modeliranja.

Prethodna istraživanja

Mnogo je faktora koji utiču na motivaciju učenika za učenjem kao što su: raznovrsnost sadržaja i metoda rada, okolina u kojoj se učenje odvija, Middleton i Spanias (1999) smatraju da je jedan od glavnih faktora uspjeh stečenog znanja. Zaista, kada učenik nešto spozna i suštinski shvati onda mnogo lakše rješava pred njega postavljene izazove. Na osnovu pojedinačnih mišljenja Riyanto i saradnici (2019) otkrivaju da učenici smatraju da su modelirani zadaci odgovarajući jer ih navode na razumno razmišljanje ali je prije toga bilo potrebno dodatno pojasniti pojmove nužne za process izrade zadataka. Autori Vorhölter i Schwarz (2020) smatraju da se modeliranim zadacima u školi može pokazati učenicima koliko se matematika često koristi u društvu i svakodnevnom životu. Kao rezultat toga, njihova motivacija za učenje matematike može se povećati. Često se tvrdi da rad na modeliranju problema u školi povećava motivaciju učenika za učenje matematike jer vide koliko se matematika često koristi u svakodnevnom životu. Vorhölter i Schwarz (2020) predstavljaju teorijski okvir za analizu ličnog smisla matematike učenika s obzirom na faktore koji na to utiču i posljedice. Oni predstavljaju rezultate kvalitativnog studija sa 5 razreda učenika Njemačkoj (16-17 godina) dviju gimnazija u koja je pokazala koje su karakteristike zadataka modeliranja i rada sa problemima modeliranja na času imale direktan ili indirektan uticaj na izgradnju mišljenja kod učenika. Jedan od razloga za odabir učenika ovog uzrasta je taj što su ovi učenici sposobni da razmišljaju o svom iskustvu tokom časova matematike.

Daljnji razlozi, ne manje važni, su to što učenici ovog uzrasta često ne mogu primijeniti matematičke metode koje su naučili na časovima matematike u svakodnevnom životu, te što učenici ovog uzrasta često misle da postoje mnogo važnije stvari od škole.

Frejd i Ärleback (2011) su radili istraživanje kod učenika švedskih srednjih škola, samo 22,5% učenika je izjavilo da je ranije čulo ili koristilo matematičke modele ili modeliranje u svom obrazovanju. Stavovi učenika su da su *zadaci bili teški*, bili su neodlučni o *zanimljivosti zadataka* koje su rješavali, a slično mišljenje su imali o tome *da li žele u budućnosti rješavati slične primjere* na svojim časovima matematike.

Maaß i sar. (2018) iznose stav da je jedna od najvažnijih prednosti podučavanja o problemima iz stvarnog svijeta je motivacija koju kod učenika i nastavnika stvara osjećaj da govorimo o onome što se trenutno dešava i šta je relevantno za nas. Dakle, relevantnost i aktuelnost su ključni faktori. Prema tome, ako odlučite da prava pitanja iz stvarnog svijeta postavite u središte lekcije, trebat će vam stvarni podaci iz realnog svijeta. Na tome je potrebno mnogo rada i istraživanja ali konačan rezultat je toga vrijedan.

Schmidt (2011) je kroz istraživanje na uzorku od 52 njemačka nastavnika matematike došla do značajnih rezultata a koja se tiču poteškoća i prepreka na koje nailaze nastavnici u implementaciji modeliranja u nastavi. Isti autor (Schmidt, 2011) pokazuje da je 62% njih žalilo na premalo materijala matematičkog modeliranja, čak 84% smatra da je navedeno gradivo previše složeno za većinu učenika i da se ne bi trebali davati kao zadaci na završnim ispitima, i kao najvažniji razlog (97% ispitanih nastavnika) ističu da zadaci modeliranja uzimaju previše vremena na času. Ova studija je otkrila u kojim oblastima postoje problemi koji ometaju nastavnike da koriste modeliranje u nastavi. Bot (2020) predstavlja rezultate radne grupe od N=60 nigerijskih nastavnika matematike srednjih škola, studija je otkrila da je sposobnost nastavnika matematike da efikasno podučavaju značajno povezana s mnogim faktorima uključujući korištenje: različitih strategija, ponavljanja, kvalitetne pripreme i pozitivan odnos sa učenicima. Anhalt et al. (2018) izvještavaju o nalazima studije sa nastavnicima na jugozapadu SAD-a o razvoju sposobnosti matematičkog modeliranja. Navedeno je da iako je matematičko modeliranje dio nastavnog plana i programa (k-12) u SAD-a mnogi nastavnici nisu dobili adekvatnu pripremu pa je planirano da se u okviru postojećeg kursa implementira modul koji bi pružio uvid u modeliranje i njegove karakteristike.

Arni i ostali (2021) su proveli istraživanje na učenicima 7. razreda osnovnih škola (N=27) u Indoneziji gdje su se ispitivali stavovi učenika prije i poslije programa rješavanja vizualno predstavljene zadatke. Rezultati spomenutog istraživanja pokazuju da je prije programa visok stepen motivacije za učenjem imalo samo 22.22% (njih 6), a poslije eksperimenta je taj procenat porastao na čak 51.85% (14 učenika). Zaista je važno probleme predstaviti vizualno, tako se postižu bolje veze između onog što se uči sa stvarnošću, kako je to slučaj sa matematičkim modeliranjem. Modeliranje je moguće primijeniti na višim nivoima obrazovanja, kao što je urađeno na Tehnološkom fakultetu Auckland, Novi Zeland. Autori Klymchuk i Spooner (2017) su došli do rezultata da većina studenata preferira zadatke čiste matematike u odnosu na primijenjenu (43 protiv 37). Oko 95% studenata nije uspjelo riješiti primijenjene probleme jer nisu shvatili šta se u tekstu zadatka traži. Zabilježeni komentari studenata su bili: *“Primijenjeni zadaci su zbunjujući”*, *“Učili bismo ovako ali ne želimo tako nešto na ispitu.”*, *“Prikazani zadaci su jasniji ako su dati tekstom umjesto čistom matematikom.”*, *“Treba bismo uraditi mnogo više zadataka primjene da bi nam to bilo jasno.”* itd. Ovakvi rezultati kod studenata su razumljivi jer se oni često “bore” sa čistom matematikom, tempo obrade gradiva je mnogo brži nego u nižim

nivoima obrazovanja pa se studenti ne žele upuštati u tu avanturu ako baš ne moraju, barem ne većina.

Ukupno $N=40$ indijskih učenika 8. razreda je podijeljeno u 5 manjih grupa bilo dio programa matematičkog modeliranja. Mishra (2017) u ovom istraživanju naglašava da je 92.5% učenika *uživalo u učenju kroz modeliranje* i stoga zagovaralo više časova kroz ovaj pristup. Oko 85% učenika smatralo je da su *motivisani za učenje matematike* i da mogu razumjeti koncept NZD NZS, a isto toliko je *preferiralo pristup modeliranjem u odnosu na tradicionalnu nastavu*. Od ukupnog broja učenika njih 70% smatra da je *matematika lagan predmet* i da se na ovaj način mogu predavati i druge teme iz matematike. Oko 87.5% učenika smatralo je da je *učenje kroz modeliranje lakše od tradicionalnog pristupa*, a isti postotak smatra da je *učenje u grupama ugodno*. 95% učenika se složilo sa *primjerenošću modela za predloženu temu*, a 97.5% vjeruje da su *materijali potrebni za određeni model nadohvat ruke*. Daher (2021) dolazi do rezultata modeliranja učenika osnovnih škola (tri grupe od 4-5 učenika) na primjeru ptice Ruh (Roc). Rezultati istraživanja su pokazali da su grupe iskusile motivacijske obrasce koji su uključivali i stilove simpatije i učenja. Osim toga, provodeći aktivnost modeliranja putem interneta pretraživanja i GeoGebre, članovi grupe su se prvenstveno bavili motivacijskim stilovima baziranim na procesima, ali su pri tome imali na umu svoj cilj da izgrade matematički model ptice Ruh.

Teorijski okvir istraživanja i hipoteze

Glavni razlog zašto je matematika najsveobuhvatnije obrazovno područje na svijetu je to što se matematika može koristiti na različite načine u područjima i temama koje nisu vezane za nju. Vremena se mijenjaju pa tako i obrazovanje, prioriteti, pretpostavke i ciljevi podučavanja se razlikuju od onih prije nekoliko decenija. U skladu s tim, koriste se nastavne strategije i metode u kojima su učenici aktivniji. Najznačajnija razlika između tradicionalnog i konstruktivističkog pristupa je razlika u pogledu procesa nastave i učenja. Fokus je pomjeren sa pristupa usmjerenog na nastavnika i podučavanje, ka pristupu orijentisanom na učenike i učenje. Učenici su suočeni sa psihološkim i socijalnim pritiskom zbog težine usvajanja matematičkih znanja. Iz tog razloga je potrebno pronaći načine približavanja matematike stvarnom svijetu kroz metode rada u što spada i matematičko modeliranje. Na taj način bi učenici bolje shvatali ono što uče i lakše prebrodili teške matematičke teme.

Cilj ove studije je ispitati općenita mišljenja nastavnika i učenika o modeliranju, o načinima primjene modeliranja u nastavi matematike, preprekama i poteškoćama sa kojima se ispitanici susreću. Dalje, ispitivano je na koji način rješavanje zadataka matematičkog modeliranja utiče na motivaciju i uspješnost učenika u nastavi matematike. Zadaci na časovima su rješavani dodatno i pomoću grafičkih alata GeoGebra i Wolfram Mathematica čime se stekao dojam da se mnogo brže i efikasnije dolazi do rješenja zadanih problema. U srednjim školama u našoj sredini modeliranje je nažalost malo ili nikako zastupljeno. Iako tehnologija nije u fokusu studije, važna je za efikasnije rješavanje grafičkog dijela matematičkog modeliranja. Prvi korak u primjeni modeliranja u nastavi je istraživanje mišljenja, zatim priprema nastavnika za podučavanje modeliranjem, kreiranje odgovarajuće literature i konačno primjena matematičkog modeliranja u nastavi matematike.

Očekivani ishodi učenja i pedagoške implikacije

Učenici bi kroz proces izrade zadataka matematičkog modeliranja trebali imati pozitivne stavove o primijenjenim zadacima u nastavi matematike. Osim toga, očekivano je da će porasti

zainteresiranost za učenjem i istraživanjem kod učenika. Također je za očekivati da će matematičko modeliranje imati veliki uticaj na motivaciju i uspješnost na nastavi. Kroz modelirane zadatke učenici imaju priliku da jasnije shvate način na koji matematika prožima sve sfere društva, i način na koji se škola može povezati sa stvarnošću. Onda će pitanje “Zašto ovo učimo?” biti sve manje prisutno u učionici. Zaista, matematičko modeliranje, na više nivoa, obogaćuje nastavu, čini ju interesantnijom, približava probleme svakodnevnice učenicima, poboljšava kritičku i misleću zrelost onih koji su uključeni u process.

Pristup obrade funkcija modeliranjem može biti od pomoći i nastavnicima, omogućiti veću angažiranost učenika na nastavi a što će u konačnici dovesti do kvalitetnijeg akademskog razvoja. Naravno da postoje barijere u rješavanju problema matematičkim modeliranjem, kao što je to bio slučaj kod rezultata Jankvist i Niss (2019) koji su u istraživanju na uzorku od 315 učenika viših razreda srednjih škola u Danskoj otkrili da nekoliko učenika odbija da se bavi zadacima modeliranja bilo zato što ne prihvataju zadatak kao dio matematike, ne znaju kako da započnu rješenje ili pak da ga prevedu u matematički jezik.

Metodologija istraživanja

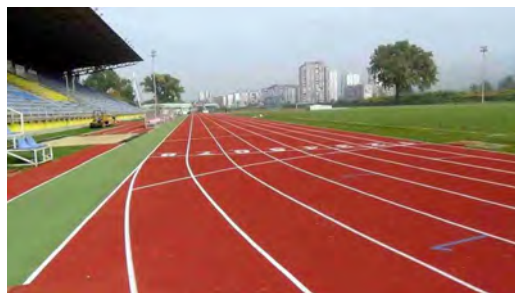
Istraživanjem su obuhvaćeni učenici ($N = 36$) gimnazija i tehničkih srednjih škola Zeničko-dobojskog kantona. Koncept je sličan onome koji su proveli Frejd i Ärlebäck (2011) na uzorku od 381 učenika završnih razreda srednjih škola u Švedskoj ili Riyanto et al. (2019). Program se sastojao od kvizova, testova, anketa, igrice i aktivnosti. Rezultate testova i komparativne vrijednosti između eksperimentalne i kontrolne grupe su prikazani u radu Bikić et al. (2021), u navedenoj studiji je predstavljena statistički značajna razlika između grupe koja je radila metodom matematičkog modeliranja (eksperimentalne grupa) u odnosu na onu grupu učenika koji su zadatke rješavali tradicionalnim metodom (kontrolna grupa). Učenici su pokazali značajan napredak u razumijevanju gradiva, rješavanju tekstualnih zadataka, zadataka modeliranja i kreiranju kritičkog mišljenja prema problemima i njihovim rješenjima.

Predmet istraživanja rada je uticaj matematičkog modeliranja na motivaciju učenika za učenjem matematike, jasnije razumijevanje matematičkih spoznaja, bolje rješavanje izazovnih problema i kvalitetnije razvijanje kritičkog mišljenja. Kroz provedena istraživanja će se ispitati stavovi učenika o važnosti ovakvog načina obrade nastavnog gradiva kao i mišljenje nastavnika o realnosti i mogućim iskoracima u primjeni istog u nastavi.

Značaj ovog programa je u tome što je vrlo aktuelan. Na svjetskom nivou obrazovanje i metode u nastavnom procesu su sve više okrenuti programima koji su povezani sa realnim životom, problemima svakodnevnice i rješavanju istih. Ovo istraživanje je pragmatično sa fokusom na upotrebu matematičkog modeliranja kao alata za unapređenje nastave matematike, lakšeg shvatanja teških matematičkih problema i motivacije učenika za učenjem. Postoji mnogo razloga uvođenja modeliranja i primjena matematike kao i prednosti njegove implementacije još od prvog razreda osnovne škole. Na tome su radili sa nastavnicima u Južnoafričkoj republici, Wessels (2014) prikazuje plan i rezultate pripreme nastavnika za rad na modeliranju sa učenicima od 6-9 godina starosti. S druge strane, postoje i izazovi sa kojima se suočavaju nastavnici i učenici. Neki od tih izazova su slabo poznavanje uloge matematike u društvenom, kulturnom, tehničkom i naučnom kontekstu i nedovoljno razumijevanje matematičkih pojmova kod učenika da bi se radilo modeliranje. Zato se u procesu uvođenja matematičkog modeliranja u nastavi mora raditi postupno, prateći preporučene korake u ovom i drugim istraživanjima. Naredni primjeri su neki od obrađenih primjera u programu modeliranja sa učenicima kroz modeliranje linearnom, kvadratnom i logaritamskom funkcijom.

Primjer matematičkog modeliranja linearnom funkcijom

Maratonac Amel želi sudjelovati na utrci „Maraton stazama Branka Ćopića“ u Novom Gradu. S obzirom da je veliki maraton, na kojem se mora istrčati 42 km, on bi trebao biti dobro pripremljen za taj događaj. Zato, pažljivo smišlja plan. Odlučio je da svaki dan pređe određenu udaljenost. Pripreme će početi 8. marta 2021. i pripreme će biti svaki dan bez obzira na vremenske uslove. Prvi će dan stati nakon 2 km, a zatim svaki sljedeći dan će biti spreman trčati 0.5 km više nego prethodnog dan. Pripreme će biti završene onog dana kada će moći istrčati svih 42 km. Istražite Amelove pripreme. Razmislite koliko kilometara Amel bude spreman istrčati prvog dana, koliko drugog dana, trećeg dana, ...

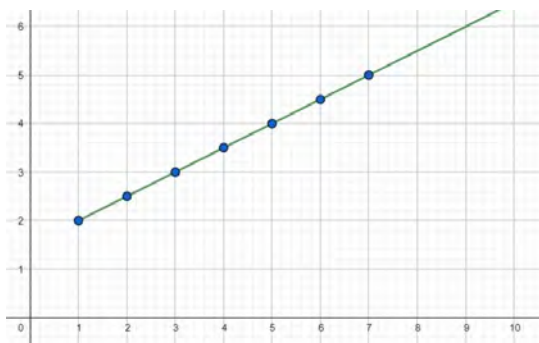


a) Popuniti tablicu.

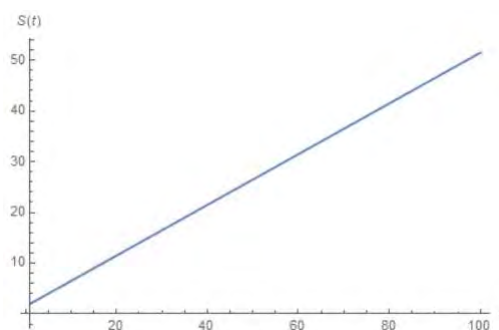
Dan priprema (t)	Pređena udaljenost u kilometrima (S)
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	

Dan priprema (t)	Pređena udaljenost u kilometrima (S)
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
...	...

- b) Koliko je kilometara Amel pretrčao 10. dana priprema?
 c) Koliko je kilometara Amel pretrčao 40. dana priprema?
 d) Podatke iz tabele (prvih 7 rezultata) prikazati u koordinatnog sistemu.
 e) Naći model za opisivanje odnosa između pretrčane udaljenosti i vremena proteklog za pripreme tj. naći funkciju koja opisuje ovaj proces.



GeoGebra



Wolfram Mathematica

- f) Objasniti kako je lakše riješiti probleme b) i c) i njima slične poznavajući model pronađen u dijelu e)
 g) Kada će Amel biti na pola puta priprema za maraton?
 h) Izračunati koliko dana traju Amelove pripreme za maraton.
 i) Da li će se Amel uspjeti pripremiti za maraton, ako je isti planiran za 30. maj 2021. sa početkom u 10:00? Odgovor opravdati!

j) Mislite li da je ovakav model realan, da li biste vi ponudili model koji je bolji i efikasniji? Odgovor pojasniti!

Primjer matematičkog modeliranja kvadratnom funkcijom

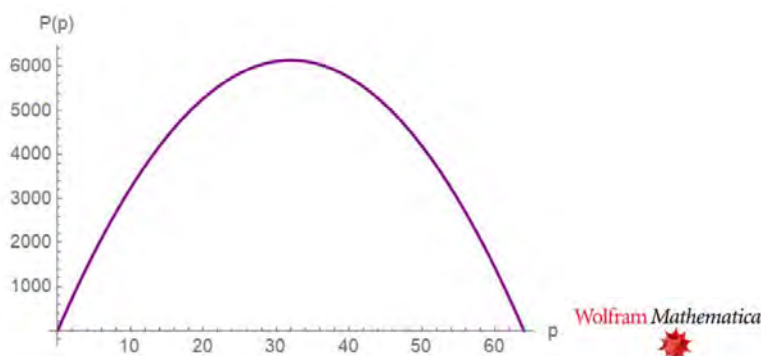
Posmatrajmo monopolnu fabriku koje proizvodi kekse. Funkcija potražnje je zadana kao $Q(p) = -6p + 384$, gdje je Q količina potražnje, a p jedinična cijena u KM.

a) Izraziti funkciju ukupnog prihoda u zavisnosti od cijene.

Šta je grafik te funkcije?

b) Izračunati nule funkcije i objasniti šta predstavljaju.

c) Izračunati cijenu proizvoda za koju se ostvaruje maksimalan prihod.



d) Izraziti funkciju ukupnog prihoda u zavisnosti od količine proizvoda. Šta je grafik te funkcije?

e) Izračunati nule funkcije i objasniti šta predstavljaju.

f) Izračunati količinu uz koju se ostvaruje maksimalan prihod i objasniti vezu sa rezultatom iz dijela c)

Primjer matematičkog modeliranja logaritamskom funkcijom

Od ispuštanja otrovnih tvari iz postrojenja u jezero ono je postalo vrlo zagađeno. Nakon zatvaranja fabrike jezero je prirodno očišćeno. Jezero je dio lanca jezera spojenih na rijeci. Svaki mjesec određeni postotak vode u jezeru se isuši i zamijeni kombinacijom čiste vode iz gornjih jezera i kiše. Jezero se tako prirodno čisti. Preliminarna istraživanja su prikazana u tablici.



Vrijeme x (mjesec)	Onečišćenost y (ppm - <i>parts per million</i> , mg/L)
1	20
5	13
10	9.8
15	8.5
20	6.9

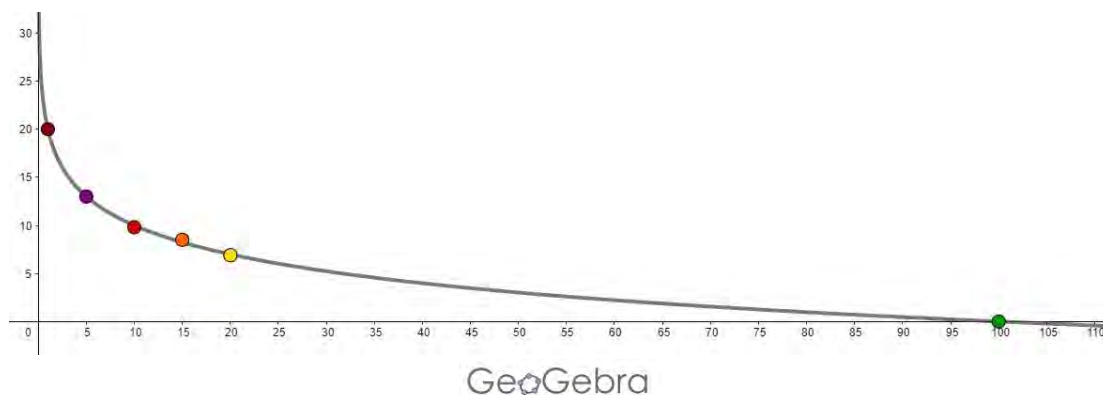
a) Kreirati vezu između datih podataka, ako je poznato da je u pitanju logaritamska funkcija.

b) Nacrtati graf funkcije iz dijela a) sa istaknutim tačkama iz tabele.

c) Izračunati onečišćenje jezera nakon 5 godina.

d) Onečišćenje manje od 0.5 ppm omogućuje kupanje u jezeru. Kada će jezero biti otvoreno za kupanje?

e) Kada će jezero biti potpuno očišćeno?



e) Da li je ovakav model realan? Šta biste izmijenili da se podaci preciznije modeliraju?

Za potrebe istraživanja su kreirani anketni upitnici, prvi upitnik za nastavnike koji se odnosio na mišljenja i stavove o modeliranju i primjeni modeliranja u nastavi. Drugi upitnik se odnosi na mišljenje učenika o modeliranim zadacima u nastavi matematike, treći upitnik o primijenjenim zadacima u nastavi i četvrti upitnik sastavljen od dva dijela: motivacija i uspješnost. U okviru programa učenici su imali priliku kroz časove učiti općenito o funkcijama, onda je uslijedila obrada funkcija modeliranjem (6 složenih problema), zadaci za vježbu (2), kvizovi ponavljanja gradiva (2), testovi (2) i gorespomenute ankete (4).

Rezultati istraživanja i diskusija

Za potrebe ispitivanja i obrade podataka korišteni su osnovni (deskriptivni) parametri: aritmetička sredina i standardna devijacija. Da bi se ispitao uticaj motivacije na uspjeh učenika koristio se test Spearman-ove korelacije. Hi-kvadrat testom se analiziralo da li postoji statistička značajna razlika u stavovima u pitanjima između grupa a t-test za analizu uparenih uzoraka za dokazivanje statistički značajne razlika između grupa prije i poslije eksperimenta. Sve analize su rađene u statističkom programu SPSS.

Analizom ankete (*Anketni upitnik 1*) kojom se ispitivala grupa nastavnika ($N = 25$), kojoj su se izjasnili o stavovima važnosti modeliranja u nastavi matematike. Pitanja su podijeljena u dvije grupe. U prvoj grupi su pitanja vezana za stavove nastavnika o modeliranju u nastavi matematike, u drugoj pitanja o poteškoćama primjene modeliranih zadataka.

Kroz odgovore koji su formirani prema Likertovoj skali (1-5) srednje vrijednosti pitanja su se kretale u rangu vrijednosti od 4 do 4.4. (svi upitnici su rađeni po Likertovoj skali 1-5) Ukupna srednja vrijednost pitanja kojima su se nastavnici izjasnili o važnosti modeliranja u nastavi matematike je $X = 4.21$. Sva pitanja imala su pozitivnu srednju ocjenu ($X > 3$) što ukazuje na važnost i pozitivne stavove nastavnika prema modeliranju u nastavi matematike. Od ukupnog broja ispitanih nastavnika njih 80% smatra da je *modeliranje korisno u nastavi*, 88% nastavnika *poznaje pojam matematičkog modeliranja*, u istom procentu se slažu da bi *zastupljenost modeliranja trebala biti veća u planovima i programima* kao i da daju odgovor svojim učenicima na pitanje *upotrebe matematičkog znanja u praksi*. Čak 84% ispitanika se slaže da je *savladavanje gradiva pomoću modeliranja efikasnije od klasičnog, doprinosi boljem razumijevanju suštine i motiviranosti učenika za obrazovanjem*.

Tabela 2. Ocjene srednjih vrijednosti o važnosti modeliranja u nastavi matematike

N1	N3	N5	N8	N11	N12	N13
Poznajem pojam matematičkog modeliranja.	Učenje putem matematičkog modeliranja je jako korisno u nastavi matematike.	Matematičko modeliranje bi trebalo biti više zastupljeno u nastavnim planovima i programima.	Saznavanje pomoću zadataka matematičkog modeliranja je puno efikasnije od onog klasičnog.	Svojim učenicima uvijek dajem odgovor na pitanje „Gdje se ovo koristi u životu?“.	Matematičko modeliranje kao rezultat ima bolje razumijevanje suštine i primjena matematike u drugim naučnim oblastima.	Savladavanjem sadržaja matematičkim modeliranjem se postiže veća motiviranost učenika za učenjem, školom, obrazovanjem.
$X_{N1} = 4.2$	$X_{N2} = 4.4$	$X_{N5} = 4.3$	$X_{N8} = 4.0$	$X_{N11} = 4.3$	$X_{N2} = 4.2$	$X_{N13} = 4.1$
Važnost modeliranja u nastavi matematike $X = 4.21$						

U odnosu na prethodna pitanja, drugih šest pitanja upitnika se koncipiralo tako da se nastavnici izjasne o mišljenju prepreka i poteškoća pri primjeni modeliranja u nastavi matematike. Odgovori na pitanja nastavnika formirana su prema Likert skali (1 – 5), i na taj način su izjasnili prema svojem mišljenju da li postoje prepreke i poteškoće u modeliranju i na koji način. Najviše nastavnika se složilo da postoje poteškoće u modeliranju na način da ga je teško implementirati u sadašnjim nastavnim programima te da nema dovoljno prostora za dodavanje časova matematičkog modeliranja ($X = 3.3$).

Tabela 3. Mišljenje nastavnika o preprekama i poteškoćama primjene modeliranja u nastavi matematike

N2	N4	N6	N7	N9	N10
Matematičko modeliranje koristim često u pripremi svojih časova.	Nastavnim planom i programom je planirano matematičko modeliranje pri izučavanju funkcija ili u nekim drugim.	Teško je implementirati matematičko modeliranje u sadašnjim nastavnim planovima i programima.	U nastavnim planovima nema dovoljno prostora za dodavanje više časova matematičkog modeliranja.	Matematičko modeliranje je teško i zbunjujuće za većinu učenika.	Matematičko modeliranje se može izučavati samo sa nadarenom djecom.
$X_{N2} = 3.1$	$X_{N4} = 2.7$	$X_{N6} = 3.3$	$X_{N7} = 3.3$	$X_{N9} = 2.9$	$X_{N10} = 2.7$
Prepreke i poteškoće primjene modeliranja u nastavi matematike $X = 3.02$					

Prema ukupnom broju ispitanih učenika u tri razreda ($N = 36$), provjereno je da li prema odgovorima na pitanja unutar sva tri razreda postoji pozitivno mišljenje o modeliranim zadacima u nastavi. Na osnovu rezultata ovog dijela upitnika je samo 36% nastavnika se izjasnilo da su koristili modeliranje u pripremi svojih časova, niskih 28% ispitanih smatra da je modeliranje planirano nastavnim planovima i programima, dok je 44% onih koji misle da bi bilo teško implementirati modeliranje u kurikulum srednje škole, te 56% njih se slaže sa konstatacijom da u nastavnim planovima nema dovoljno prostora za dodavanje časova matematičkog modeliranja. Sve navedeno nam govori o tome koliko je nastavnicima zaista teško jer ne postoje sistemska rješenja, na takvim rješenjima je potrebno raditi da bi se nastavnici pripremili za ovakav način rada. Matematičko modeliranje doprinosi i ličnom razvoju ne samo učenika nego i

nastavnika. *Anketni upitnik 2* je za cilj imao ispitivanje mišljenja učenika o modeliranim zadacima nakon eksperimentalnog dijela programa.

<i>Anketni upitnik 2</i>		1	2	3	4	5
MNM1	Pristup sa primjerima iz svakodnevnog života u nastavi matematike je mnogo efikasniji u odnosu na klasični pristup.					
MNM2	Upotreba modeliranih zadataka u nastavi matematike doprinosi motivaciji, lakšem razumijevanju gradiva te boljoj primjeni istog u nekih drugim praksama.					
MNM3	Tekstualni zadaci sa funkcijama su zbunjujući i teški za shvatiti.					
MNM4	Učenje kroz modeliranje je uspješnije od klasičnog učenja, učenici bolje razumiju pojam funkcije, vrijednosti funkcije, rasta funkcije, područja definisanosti i drugih aspekata vezanih za funkcije.					
MNM5	Nastavom sa primijenjenom matematikom se postiže kvalitetnija interakcija učenik-nastavnik, učenici imaju prostora za kreativno izražavanje, razvijanje vlastitog kritičkog mišljenja kod postavljenih zadataka.					

Rezultati ovog ispitivanja su pokazali da je čak 94.44% učenika smatra da je *pristup primjerima iz svakodnevnog života efikasniji u odnosu na klasični*, 88.89% njih ima mišljenje da *upotreba modeliranih zadataka u nastavi doprinosi motivaciji i lakšem razumijevanju gradiva*, 77.78% govori da je *učenje modeliranjem uspješnije od tradicionalnog*, 97.22% da se tako postiže *kvalitetnija interakcija i odnos učenik—nastavnik*.

Tabela 4. *Mišljenje učenika o modeliranim zadacima u nastavi matematike*

Razred			u potpunosti se ne slažem	ne slažem se	neodlučan /neodlučna sam	slažem se	u potpunosti se slažem	p (sig.) - χ^2
MNM1	I	N	0	0	0	7	5	p=0.192 $\chi^2=8.628$
		%	0.0%	0.0%	0.0%	58.3%	41.7%	
	II	N	1	0	0	3	8	
		%	8.3%	0.0%	0.0%	25.0%	66.7%	
	III	N	0	0	1	2	9	
		%	0.0%	0.0%	8.3%	16.7%	75.0%	
MNM2	I	N	0	0	2	4	6	p=0.523 $\chi^2=5.164$
		%	0.0%	0.0%	16.7%	33.3%	50.0%	
	II	N	1	0	1	2	8	
		%	8.3%	0.0%	8.3%	16.7%	66.7%	
	III	N	0	0	0	4	8	
		%	0.0%	0.0%	0.0%	33.3%	66.7%	
MNM3	I	N	2	4	3	2	1	p=0.942 $\chi^2=2.867$
		%	16.7%	33.3%	25.0%	16.7%	8.3%	
	II	N	1	2	4	4	1	
		%	8.3%	16.7%	33.3%	33.3%	8.3%	

III	N	3	3	3	2	1	
	%	25.0%	25.0%	25.0%	16.7%	8.3%	
MNM4	I	N	0	0	4	3	p=0.380 $\chi^2=5.600$
		%	0.0%	0.0%	33.3%	25.0%	
	II	N	1	0	1	5	
		%	8.3%	0.0%	8.3%	41.7%	
	III	N	1	0	1	2	
		%	8.3%	0.0%	8.3%	16.7%	
MNM5	I	N	0	0	0	6	p=0.582 $\chi^2=2.857$
		%	0.0%	0.0%	0.0%	50.0%	
	II	N	1	0	0	4	
		%	8.3%	0.0%	0.0%	33.3%	
	III	N	0	0	0	4	
		%	0.0%	0.0%	0.0%	33.3%	

Kao što se može uočiti iz prethodne tabele stavovi učenika i prije i poslije eksperimenta su bili pozitivni o primijenjenim zadacima u nastavi matematike. Odgovorima koji se pojavljuju u rezultatima možemo donijeti zaključak da su u svim pitanjima osim pitanja broj 3 učenici iznijeli pozitivan stav. Pitanje po rednim brojem 3 u anketi je glasilo *"Tekstualni zadaci sa funkcijama su zbunjujući i teški za shvatiti"*, dakle učenici ne smatraju da su takvi zadaci teški (samo 30.56% ima afirmativno mišljenje), mišljenja su podijeljena ali preovladavaju ona u kojima se učenici ne slažu sa tvrdnjom. Zaista, može se reći da po rezultatima ove ankete učenici preferiraju primijenjene (tekstualne) zadatke u odnosu na one klasične. Kao što se može uočiti u Tabeli 4 učenici su se u potpunosti slagali sa tvrdnjama u ukupnom većinskom odnosu ($> 50\%$) u sva tri razreda.

Jedan od ciljeva istraživanja je bio ispitati da li učenici imaju pozitivne stavove prije i poslije eksperimentalnog dijela o primijenjenim zadacima u nastavi matematike (*Anketni upitnik 3*).

Anketni upitnik 3		1	2	3	4	5
F1	Razumijem matematički izraz funkcija i sve njene osobine.					
F2	Poznajem pojam matematičkog modeliranja.					
F3	Smatram da je matematika široko primjenljiva nauka.					
F4	Nastava matematike je zanimljiva zbog vrste gradiva koje se predaje.					
F5	Često se od nas traži kritičko razmišljanje na časovima matematike.					
F6	Bolje bismo učili ako znamo gdje se to znanje može primijeniti.					
F7	Od svog nastavnika uvijek dobijem odgovor na pitanje o „primjeni naučenog u svakodnevnom životu ili u prirodi“.					
F8	Više sam motivisan za rad kada je nastava zanimljivija.					
F9	Koristimo programe/aplikacije/aplete/platforme u nastavi matematike.					

Devet pitanja, kojima su učenici ($N = 36$) anketirani prije i poslije eksperimenta (*Anketni upitnik 3*), podijeljeno je u dvije grupe. Prva grupa (pitanja F5, F7, F9) od kojih su učenici prije eksperimenta imali srednju vrijednost sumiranih odgovora $X = 9.86$ sa $SD = \pm 2.39$, dok su poslije eksperimenta imali mišljenje $X = 11.00$ sa $SD = \pm 2.56$. Razlog za to jeste priroda pitanja.

Naime, pitanja F5, F7 i F9 su vezana za mišljenje učenika o njihovom dosadašnjem iskustvu u nastavi matematike. Nije bilo za očekivati da će se njihovi stavovi u ovom dijelu promijeniti zbog našeg zajedničkog programa. Rezultati su prikazani u tabeli ispod.

Tabela 5. Razlika mišljenja učenika o primjenjenim zadacima u nastavi prije i poslije eksperimenta, prvi dio

<i>Pitanja</i> <i>5-7-9</i>	<i>X</i>	<i>N</i>	<i>SD</i>
<i>Prije</i>	9.86	36	2.392
<i>Poslije</i>	11.00	36	2.563
$[t = -1.967; p = 0.057]$			

Analizom t-testa uparenih uzoraka dokazalo se da između grupa prije i poslije eksperimenta ne postoji statistička signifikantna razlika ($p > 0.05$). Napredak nakon eksperimenta postoji, ali ne statistički značajan. Druga grupa pitanja (F1, F2, F3, F4, F6, F8) je imala srednju vrijednost $X = 24.67$ i standardnu devijaciju $SD = 3.978$ prije eksperimenta, i vrijednosti $X = 26.44$ i $SD = 2.335$ nakon eksperimenta.

Tabela 6. Razlika mišljenja učenika o primjenjenim zadacima u nastavi prije i poslije eksperimenta, drugi dio

<i>Pitanja</i> <i>1-2-3-4-6-8</i>	<i>X</i>	<i>N</i>	<i>SD</i>
<i>Prije</i>	24.67	36	3.978
<i>Poslije</i>	26.44	36	2.335
$[t = -2.494; p = 0.018]$			

Analizom t-testa uparenih uzoraka, dokazalo se da postoji statistički značajna razlika među grupama prije i poslije eksperimenta u mišljenju učenika o primijenjenim zadacima u nastavi matematike. Nakon potvrde o signifikatnosti testa, urađen je dodatni test o veličini uticaja (eta $r = 0.32$) što ukazuje da ogroman uticaj eksperimenta na promjenu mišljenja učenika. Iz svega navedenog možemo zaključiti da je eksperiment zaista uticao na mišljenje učenika u ovom domenu.

Na kraju, ispitivalo se da li postoji povezanost motivacije učenika sa njihovom uspješnosti u nastavi. Testom Spearman-ove korelacije ćemo pokazati da postoji veza između motivacije M1–M7 i rezultata eksperimenta E1–E7 ukupno. U prilogu statistike opisat ćemo one statistički signifikantne korelacije.

<i>Anketni upitnik 4</i>		1	2	3	4	5
M1	Učenje putem matematičkog modeliranja na časovima mi se dopalo.					
M2	Preferiram klasičnu/standardnu nastavu u odnosu na onu koja se direktno povezuje sa svakodnevnim životnim primjerima.					
M3	Matematičko modeliranje mi je pomoglo da bolje razumijem matematičke izraze i koncepte koje smo učili.					
M4	Način na koji smo rješavali zadatke me više motivira da istražujem i druge oblasti u matematici na isti način.					

M5	Volio/ljela bih da smo i druge teme u matematici obrađivali kao što smo to radili sa matematičkim modeliranjem.					
M6	Osjećao/la sam se zabrinuto kada je rečeno da ćemo raditi zadatke matematičkim modeliranjem jer mi je to bilo nešto sasvim novo.					
M7	Bilo je korisno vidjeti da matematika ima svoju primjenu na primjerima iz fizike, hemije, biologije, ekonomije, sporta, prirodnih pojava, svakodnevnog života i dr.					
E1	Matematičko modeliranje mi je pomoglo da razumijem domen i kodomen funkcije.					
E2	Apleti/programi/platforme koje smo koristili mi nisu pomogli da bolje razumijem gradivo.					
E3	Primjeri koje smo radili putem matematičkog modeliranja tokom časova su bili izazovni.					
E4	Zadaci koje smo dobili za samostalan rad (za vježbu) su bili teški.					
E5	Učenje pomoću matematičkog modeliranja mi je pomoglo da bolje razumijem osnovne matematičke pojmove vezane za funkcije.					
E6	Učenje sa matematičkim modeliranjem mi nije pomoglo da bolje razumijem pojam „originala i vrijednosti funkcije“.					
E7	Nije bilo teško naučiti rješavanje zadataka pomoću matematičkog modeliranja.					

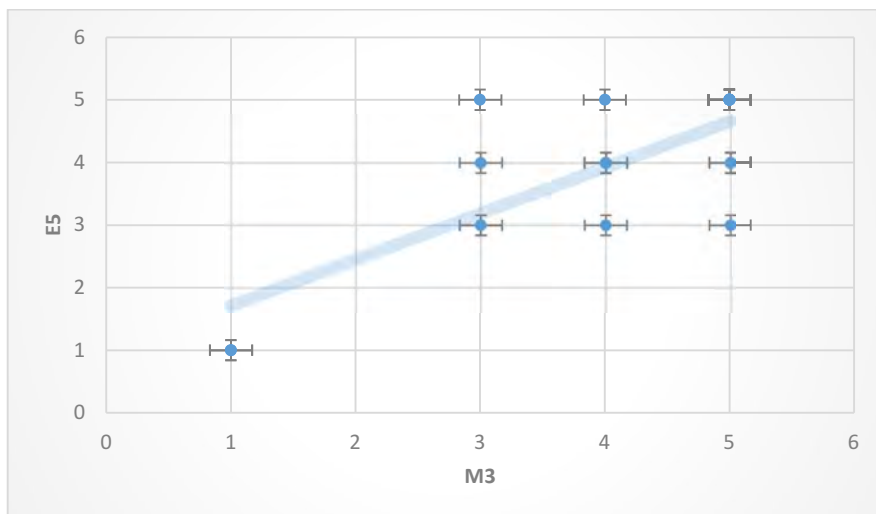
Odnos M3 i E5

M3: Matematičko modeliranje mi je pomoglo da bolje razumijem matematičke izraze i koncepte koje smo učili.

E5: Učenje pomoću matematičkog modeliranja mi je pomoglo da bolje razumijem osnovne matematičke pojmove vezane za funkcije.

Analizom ove dvije varijable, i dovođenjem u vezu, dokazano je da postoji statistički značajna veza ($p < 0.05$). Povezanost ove dvije varijable pokazuje da učenje modeliranja u nastavi matematike pomaže da se bolje razumiju osnovni matematički pojmovi vezani za funkcije. Spearman korelacijom se dokazalo da se radi o jakoj vezi ($r = 0.5$) koja ima pozitivan smjer kretanja, odnosno da povećanjem jedne vrijednosti varijable dolazi do povećanja druge.

$[\rho = 0.579; p < 0.001]$



Grafikon 1. Histogram rasutosti M3 – E5

Odnos M4 i E1

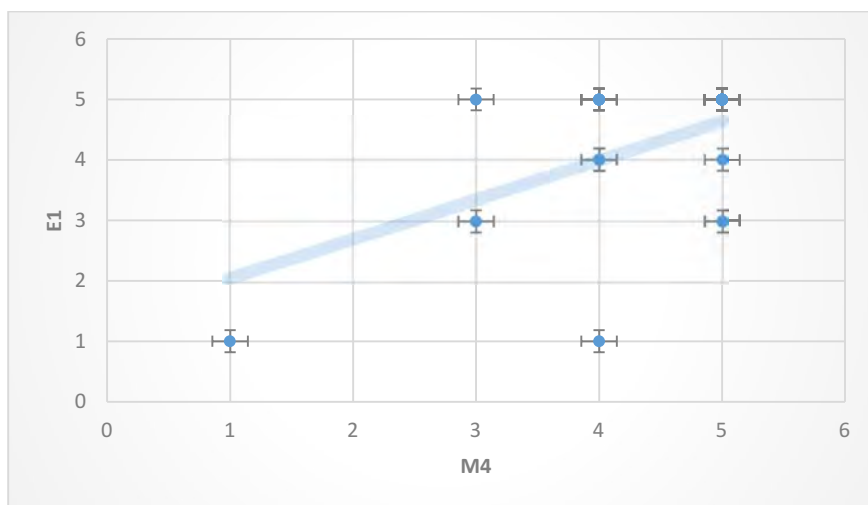
M4: Način na koji smo rješavali zadatke me više motivira da istražujem i druge oblasti u matematici na isti način.

E1: Matematičko modeliranje mi je pomoglo da razumijem domen i kodomen funkcije.

Analizom ove dvije varijable, i dovođenjem u vezu, dokazalo se da postoji statistički značajna veza ($p < 0.05$). Ova povezanost ukazuje da način na koji učenici rješavaju zadatke više ih motivira da istražuju i druge oblasti u matematici na isti ili sličan način.

Spearman korelacijom se dokazalo da se radi o srednje jakoj vezi ($r = 0.3$) koja ima pozitivan smjer kretanja, odnosno da povećanjem jedne vrijednosti varijable dolazi do povećanja druge.

[$\rho = 0.367$; $p = 0.028$]



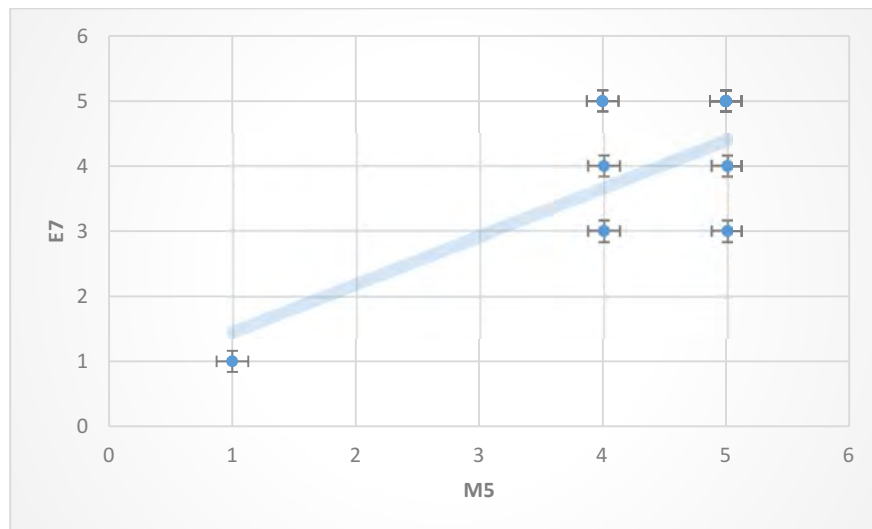
Grafikon 2. Histogram rasutosti M4 – E1

Odnos M5 i E7

M5: Volio/voljela bih da smo i druge teme u matematici obrađivali kao što smo to radili sa matematičkim modeliranjem.

E7: Nije bilo teško naučiti rješavanje zadataka pomoću matematičkog modeliranja.

Korelacijom pitanja 5 iz motivacije i 7 iz eksperimenta, dokazalo se da postoji statistički značajna veza ($p < 0.05$). Na ovaj način je dokazano da bi učenici voljeli da druge teme u matematici obrađuju kao što su to radili sa matematičkim modeliranjem, a što im je olakšalo rješavanje zadataka iz matematičkog modeliranja. Spearman korelacijom se dokazalo da se radi o srednje jakoj vezi ($r = 0.3$) koja ima pozitivan smjer kretanja, odnosno da povećanjem jedne vrijednosti varijable dolazi do povećanja druge. [$\rho = 0.361$; $p = 0.030$]



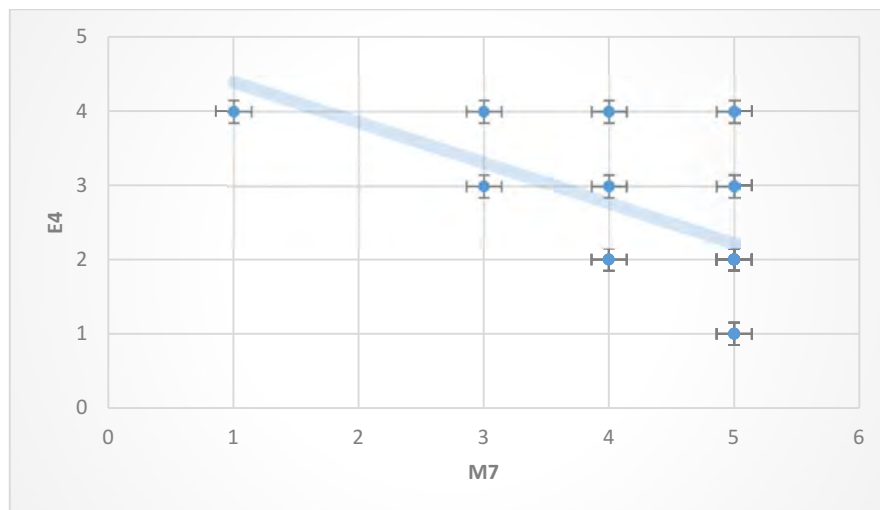
Grafikon 3. Histogram rasutosti M5 – E7

Odnos M7 i E4

M7: Bilo je korisno vidjeti da matematika ima svoju primjenu na primjerima iz fizike, hemije, biologije, ekonomije, sporta, prirodnih pojava, svakodnevnog života i dr.

E4: Zadaci koje smo dobili za samostalan rad (za vježbu) su bili teški.

Dovođenjem u vezu ove dvije varijable motivacije i eksperimenta, dokazalo se da postoji statistički značajna veza ($p < 0.05$).



Grafikon 4. Histogram rasutosti M7 – E4

Zadaci koje su učenici dobili za samostalan rad (za vježbu) su bili teški, ali je bilo korisno vidjeti primjenu u fizici, biologiji, hemiji, prirodnim pojavama, sportu. Spearman korelacijom se dokazalo da se radi o srednje jakoj vezi ($r = 0.4$), ova korelacija ima negativan predznak što govori i kontra kretanju varijabli unutar ove veze (povećanjem jedne dolazi do smanjenja druge i obratno). Odnosno kako se bude povećavala primjenjivost matematike tako će se teškoća zadataka umanjiti, odnosno zadaci će biti manje teški za razumjeti. [$\rho = -0.484$; $p = 0.003$]

Na osnovu svega navedenog, zaključak slijedi da zaista postoji veza motivacije učenika sa njihovom uspješnošću, matematičkim modeliranjem se uspješno doći do željene veze.

Zaključak

Ovo istraživanje daje valjane i praktične zadatke modeliranja matematike za učenike srednjih škola, plan časova i radne listove, kvizove, zabavne igre i prezentacije, i konačno Priručnik za nastavnike matematike - *MATEMATIČKO MODELIRANJE* koji bi trebao uskoro biti dostupan nastavnicima. Priručnik se bavi matematičkim modeliranjem pomoću svih vrsta funkcija koje se izučavaju u srednjoj školi (linearna, kvadratna, polinomska, racionalna, iracionalna, eksponencijalna, logaritamska, trigonometrijske i funkcije više varijabli) a sadrži preko 50 složenih zadataka matematičkog modeliranja sa rješenjima. Učenici koji su bili dio eksperimentalne grupe su sa oduševljenjem govorili o tome kako su im časovi modeliranja bili inspirativni i zanimljivi. Način rada, obrada zadataka kroz modeliranje, daje mogućnost učenicima da razvijaju individualne ali i timske vještine. Kroz anketiranje učenici su pokazali koliko je ovaj metod zaista uticao na njih, oko 91.67% njih kaže da im se *učenje modeliranjem dopalo*, 88.89% ispitanika *je motivisano da istražuje druge oblasti na sličan način*, 97.22% učenika *bi voljelo da su i druge teme obrađivali kao modeliranjem*, dok samo 2.78% (1 učenik) *preferira klasičnu nastavu u odnosu na onu koja se povezuje sa svakodnevnicom*. Frejd i Ärleback (2011) navode da je najviše onih učenika kojima je modeliranje *lahko* dok manje njih smatra da je modeliranje *zabavno* ili *zanimljivo*.

Integrirati zadatke modeliranja u kurikulume srednjih škola bi značilo približiti školu stvarnom životu a što bi trebao biti motiv i cilj svakog obrazovnog sistema. Zato je i upućen je prijedlog za dopunu Kurikuluma matematike gimnazija u okviru projekta "Kvalitetno obrazovanje kroz kurikularnu reformu" ZE-DO kantona. Dobijene povratne informacije od učenika koji su bili dio programa su izrazito pozitivne. Učenici navode da je ono što su naučili *korisno*, da su *uživali u časovima* i da im *takav pristup više odgovara*, što se moglo vidjeti na osnovu njihovih rezultata i stavova analiziranih u istraživanju. Nakon eksperimentalnog dijela 31/36 učenik (86.11%) kaže da *razumije matematički izraz funkcije i njenih osobina*, u odnosu na vrijeme prije programa kada ih je to tvrdilo 28/36 (77.78%), također 33/36 učenika smatra da bi *bolje učili ako bi znali gdje se to znanje može primijeniti* dok je prije eksperimenta takvo mišljenje dijelilo 29/36 (80.56%) učenika.

Matematičko modeliranja kao okvir se pokazalo kao moćan alat za kvalitetnije rezultate učenika. Modeliranje je potrebno posmatrati kao sredstvo za učenje matematike. Nekoliko studija (vidi opsežnu anketu u Schukajlow et al., 2018) pokazalo je da modeliranje može pomoći u poticanju motivacije, interesa i smisla u pogledu učenja matematičkih koncepata, što je konačan zaključak našeg istraživanja.

Literatura

1. Anhalt, C. O., Cortez, R., & Bennett, A. B. (2018). The emergence of mathematical modeling competencies: An investigation of prospective secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(3), 202-221. <https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1474532>
2. Apatić, D. (2016). Modeliranje [Modelling] [Graduation thesis, University of Osijek]. Nacionalni repozitorij završnih i diplomskih radova ZIR. <https://zir.nsk.hr/islandora/object/mathos%3A70>

3. Arni, F., & Simarmata, R. H. (2021, May). Learning Mathematical Modeling: How is Junior High School Students' Motivation Through Visual_Formed Problems?. In *1st International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMMEd 2020)* (pp. 250-256). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/assehr.k.210508.072>
4. Bikić, N., Burgić, Dž., & Kurtić, V.(2021). The effects of mathematical modelling in mathematics teaching of linear, quadratic and logarithmic functions. *European Journal of Mathematics and Science Education*, 2(2), 129-144. <https://doi.org/10.12973/ejmse.2.2.129>
5. Bot, T. D. (2020). On categories of mathematics teachers' classroom characteristics and perceived influence on effective mathematics teaching in secondary schools in Plateau State, Nigeria. *European Journal of Mathematics and Science Education*, 1(2), 121-130. <https://doi.org/10.12973/ejmse.1.2.121>
6. Botoš, Zofia (2014). Modelirani zadaci u matematici - master rad. Univerzitet u Novom Sadu. Prirodno-matematički fakultet. Departman za matematiku i informatiku.
7. Daher, W. (2021). Middle School Students' Motivation in Solving Modelling Activities With Technology. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(9), em1999. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11127>
8. Frejd, P., & Årlebäck, J. B. (2011). First results from a study investigating Swedish upper secondary students' mathematical modelling competencies. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (Vol. 1, pp. 407-416). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_40
9. Galbraith, P., & Holton, D. (2018). *Mathematical Modelling: A guidebook for teachers and teams*. Australian Council for Educational Research (ACER).
10. Jankvist, U.T. & Niss, M. (2019). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51:4, 467-496, <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587530>
11. Klymchuk, S., & Spooner, K. (2017). Application Problems Vs Pure Mathematics Questions: Students' Perspectives. In *International Conference Mathematics Education beyond 16: Pathways and Transitions*. Institute of Mathematics and its Applications (IMA).
12. Maaß J., O'Meara N., Johnson P., O'Donoghue J. (2018) Introduction to Modelling. In: *Mathematical Modelling for Teachers. Springer Texts in Education*. (pp. 1-21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00431-6_1
13. Middleton, J. A., & Spanias, P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 65-88. <https://doi.org/10.2307/749630>
14. Mishra, O. (2017). Mathematical Modelling - An Effective Method for Making Mathematics Learning Joyful At Lower Secondary Level. *IOSR Journal of Research & Method in Education (IOSRJRME)*, 07(01), 44–50. <https://doi.org/10.9790/7388-0701034450>
15. Niss, M. (2010). Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. In: R. Lesh, P.L. Galbraith, C.R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13*. 43–59. New York, NY: Springer.
16. Niss, M., & Blum, W. (2020). The Learning and Teaching of Mathematical Modelling (1st ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315189314>
17. Schmidt, B. (2011). Modelling in the Classroom: Obstacles from the Teacher's Perspective. In: Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G. (eds) *Trends in*

- Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, vol 1.* (pp. 641-651). https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_61
18. Siller, H.-S., & Greefrath, G. (2020). Modelling tasks in central examinations based on the example of Austria. In G. Stillman, G. Kaiser, & C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical modelling education and sense-making*. (pp. 383–392). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_33
 19. Schukajlow, S., Kaiser, G. & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM Mathematics Education* 50, 5–18 (2018). <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5>
 20. Vorhölter K., Schwarz B. (2020) Fostering Students' Construction of Meaningfulness of Mathematics with Mathematical Modelling Problems. In: Stillman G., Kaiser G., Lampen C. (Eds.) *Mathematical Modelling Education and Sense-making. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. (pp. 323-333) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_28
 21. Wess, R., & Greefrath, G. (2019). Professional competencies for teaching mathematical modelling—Supporting the modelling-specific task competency of prospective teachers in the teaching laboratory. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *European Research in Mathematics: Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1274–1283). Freudenthal Group.
 22. Wessels, H. (2014). Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(9), 22-40.

THE INFLUENCE OF MATHEMATICAL MODELLING ON MOTIVATION AND SUCCESS IN TEACHING MATHEMATICS OF SECONDARY SCHOOL STUDENTS

Abstract

The aim of this paper is to present the influence of mathematical modeling as a method of work on the motivation and success of students while teaching mathematics. For the purpose of the research, an experimental group of (N = 36) students was formed, divided into three classes: linear, quadratic and logarithmic function. During the period of 6 weeks, high school students of gymnasium schools and technical schools of Zenica-Doboj Canton had the opportunity to study about the functions through mathematical modelling. Lessons were performed by distance learning, using: graphic writing tablet (HUION), PDF Annotator, Google Workspace, ZOOM, GeoGebra, Wolfram Mathematica, Quizizz, MSOffice, WordWall. The aim of the research was to examine students' attitudes about mathematical modeling in mathematics teaching and to show the influence of mathematical modeling on the efficiency of mathematics teaching in the study of functions and their properties. The results of tests, examinations, surveys, questionnaires lead to the conclusion that the application of mathematical modeling as a way of studying and investigating functions is significantly more efficient than traditional teaching of mathematics. The participants of the program had positive attitudes and opinions about modeling in mathematics teaching, and the influence of motivation on the success of students in mathematics teaching was shown. The integration of mathematical modeling in the teaching of mathematics would be extremely important for the academic development of students, for understanding the essence of the acquired knowledge, for better thinking and developing critical thinking skills.

Keywords: *mathematical modelling, mathematics, modelling, motivation, teaching mathematics, applied mathematics, success*