

Dr. sc. Bernadin Ibrahimpašić

JEDNA DRUGAČIJA PROCJENA VRIJEDNOSTI NEKIH IRACIONALNIH BROJEVA

Sažetak

Iracionalne brojeve, koji su po definiciji realni brojevi koje ne možemo prikazati u obliku razlomka čiji je brojnik cijeli a nazivnik prirodan broj, ne možemo izračunati potpuno tačno. Zbog toga je cilj takve brojeve aproksimirati sa što većom tačnošću. U radu ćemo pomoću numeričkih vjerojatnosnih algoritama, tj. algoritama koji svoje odluke ostavljaju slučaju i čija je osnovna karakteristika da mogu različito reagirati ako su dva puta primijenjeni na isti slučaj, uz upotrebu osnovnih matematičkih operacija, aproksimirati – procjenjivati vrijednost iracionalnih brojeva. Poseban naglasak ćemo staviti na aproksimaciju – procjenu vrijednosti broja π . Procjenu ćemo vršiti gađajući dvo i trodimenzionalnu metu, te rasipanjem čačkalica na drveni pod.

Ključne riječi: iracionalni brojevi, vjerojatnosni algoritmi, Buffonov problem

Uvod

Iracionalne brojeve, koji su po definiciji realni brojevi koje ne možemo prikazati u obliku razlomka, čiji je brojnik cijeli a nazivnik prirodan broj, ne možemo izračunati potpuno tačno. Njihov decimalni zapis je beskonačan i neperiodičan. Zbog toga je cilj takve brojeve aproksimirati sa što većom tačnošću.

Algoritam predstavlja konačan i precizno definiran niz koraka kojih treba da se držimo kako bismo riješili određeni problem. On predstavlja skup operacija, potrebnih za rješavanje nekog problema, koje se izvode po tačno određenom redoslijedu. Naziv potiče od poznatog perzijskog matematičara Muhammada ibn Musa al-Hwarizmija, čije je latinizirano ime bilo Algoritmija. Živio je na prelazu iz 8. u 9. stoljeće, a njegovo djelo *Knjiga o uspostavljanju i suprotstavljanju* (*Kitab al-gabr wa-al-muqabala*, oko 820. godine), s latinskim prevodom iz 12. stoljeća, znatno je uticalo na razvoj algebre u Europi, koja je po arapskoj riječi *al-gabr* i dobila ime. Algoritam koji daje uvijek iste izlaze za iste ulaze, pod bio kojim uvjetima, se naziva deterministički. Algoritam koji u ponovljenom izvršavanju daje različite izlaze za isti ulaz se naziva nedeterministički. Algoritam koji u bar jednom dijelu izvršavanja donosi neku odluku slučajnim odabirom se naziva stohastički algoritam. Jedna vrsta stohastičkih algoritama su vjerojatnosni algoritmi. Vrijeme njihovog izvršavanja, kao i rezultati, variraju od jedne upotrebe do druge. Odgovor dobijen vjerojatnosnim algoritmom je aproksimativan, ali se njegova očekivana preciznost poboljšava kako se povećava vrijeme koje imamo na raspolaganju za korištenje algoritma. Greška je obično obrnuto proporcionalna kvadratnom korijenu količine obavljenog posla.

Kod implementacije vjerojatnosnih algoritama, često se dolazi u situaciju da su nam potrebni slučajni brojevi. Pojam slučajnih brojeva je u očitoj kontradikciji s pojmom računara kao determinističke naprave. Međutim, tu se ne radi o potpuno slučajnim brojevima, jer pravi generatori slučajnih brojeva u praksi nisu dostupni. Najčešće su kao zamjena u upotrebi pseudoslučajni generatori. U ovom slučaju se ne radi o brojevima koji su u potpunosti slučajni, nego o brojevima koji samo na prvi pogled izgledaju slučajni, tj. riječ je o takozvanim

pseudoslučajnim brojevima. Pseudoslučajni generatori su determinističke procedure koje mogu generirati duge nizove vrijednosti koje imaju slučajan slijed. Da bi se takav niz započeo, treba osigurati početnu vrijednost, tzv. sjeme (engl. seed). Problem je što isto sjeme uzrokuje uvijek nastanak istog niza i zato, da bismo osigurali različite nizove, možemo npr. izabrati sjeme koje ovisi o vremenu i/ili datumu. Većina programskih jezika ima ovakav generator, iako neke izvedbe treba uzeti s rezervom.

U [3] i [5] se mogu pronaći neki rezultati dobijeni u implementaciji pomoću Turbo Pascala, C++ i C#. U ovom radu koristimo (pseudo)slučajni generator u PARI/GP [7]. To je kompjuterski algebra-sistem koji je dizajniran za brze proračune u teoriji brojeva, ali sadrži i veliki broj drugih korisnih matematičkih funkcija. Korištena je preciznost od 308 značajnih cifara, od kojih je 300 prikazanih.

U radu ćemo pomoću 3 algoritma procijeniti vrijednost broja π . Koristit ćemo poznati Buffonov problem rasipanja čačkalica na drveni pod, te dvije simulacije gađanja strelicama u metu. Jednom ćemo simulirati gađanje u dvodimenzionalnu, a drugi put u trodimenzionalnu metu. Osim toga, simulacijom gađanja dvodimenzionalne mete, procijenit ćemo vrijednost broja $\sqrt{S_2}$, gdje se broj S_2 može prikazati kao suma dva kvadrata, a zatim ćemo, simulacijom gađanja trodimenzionalne mete, procijeniti vrijednost broja $\sqrt{S_3}$, gdje se broj S_3 može prikazati kao suma tri kvadrata.

Buffonov problem

Istresemo li kutiju čačkalica za zube na drveni pod, one će se raspršiti po podu na slučajne položaje i to svaka nezavisno od ostalih. Ako je u kutiji bilo 355 čačkalica, te ako je svaka bila dugačka tačno pola širine dasčice na podu, postavlja se pitanje koliko će čačkalica pasti preko pukotine između dvije podne dasčice. Očigledno je da je moguć svaki odgovor između 0 i 355. Međutim, Georges-Louis Leclerc je pokazao da očekivani broj takvih čačkalica može biti izračunat, te da on iznosi, gotovo tačno, 113. Zašto?

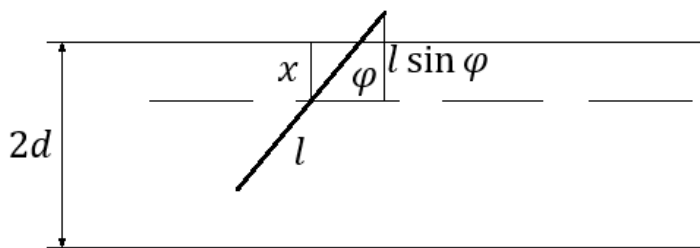
Georges-Louis Leclerc (7.9.1707. – 4.4.1788.) bio je francuski prirodoslovac, matematičar, kozmolog i enciklopedist. U toku svog života je kupio selo Buffon, koje je prije toga njegov otac kupio i prodao, te je svom imenu dodao i titulu Comte de Buffon (grof od Buffona). Kasnije je i postao prepoznatljiv po imenu Buffon. Gore spomenuti problem, koji je Buffon postavio 1733. a riješio 1777. godine, je njemu u čast i dobio ime Buffonov problem. To je jedan od najstarijih problema iz geometrijske vjerojatnosti.

Pogledajmo otkud Buffonu rezultat 113. Postavimo matematički model danog problema. Neka je ravnina podijeljena paralelnim pravcima. Neka je udaljenost između svaka dva susjedna pravca jednaka $2d$. Na ravninu slučajno pada čačkalica (u originalnom Buffonovom problemu je padala igla) dužine $2l$. Kako čačkalica ne bi istovremeno mogla pasti preko dva pravca, uzimamo da je $l < d$. Interesuje nas kolika je vjerojatnost da čačkalica siječe (dira) bar jedan pravac.

Neka je X slučajna varijabla koja odgovara udaljenosti središta čačkalice od najbližeg pravca, te neka je Φ slučajna varijabla koja odgovara uglu koji čačkalica zatvara s pravcem koji siječe. Obje slučajne varijable su uniformno distribuirane, i to $X \sim U(0, d)$ a $\Phi \sim (0, \pi)$, s funkcijama gustoće

$$f_X(x) = \frac{1}{d} \cdot K_{(0,d)}(x) \quad \text{i} \quad f_\Phi(\varphi) = \frac{1}{\pi} \cdot K_{(0,\pi)}(\varphi),$$

gdje je $K_A(a)$ karakteristična funkcija skupa A , tj. funkcija za koju vrijedi da je $K_A(a) = 1$, ako $a \in A$, a inače je 0.

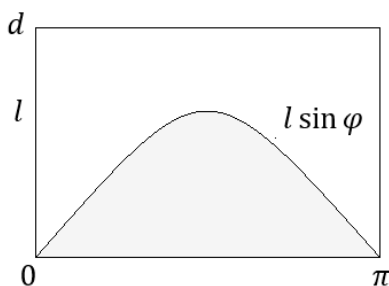


Buffonov problem

Očigledno je da je nužan i dovoljan uvjet da igla siječe (bar) jedan pravac $x \leq l \sin \varphi$, tj. ako to posmatramo kao događaje, onda imamo

$$\begin{aligned} P\{X \leq l \sin \Phi\} &= \int_{X \leq l \sin \Phi} f_{\Phi, X}(\varphi, x) d\varphi dx = (\text{nezavisnost}) = \\ &= \int_{X \leq l \sin \Phi} f_{\Phi}(\varphi) f_X(x) d\varphi dx = \frac{1}{d\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{l \sin \varphi} dx \\ &= \frac{1}{d\pi} \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = -\frac{l}{d\pi} (\cos \varphi) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2l}{d\pi}. \end{aligned}$$

Istu formulu za vjerojatnost događaja $X \leq l \sin \Phi$ dobijamo ako posmatramo geometrijsku vjerojatnost. Imamo sljedeću sliku.



$$\begin{aligned} P\{X \leq l \sin \Phi\} &= \frac{\text{površina osjenčenog lika ispod krivulje}}{\text{površina pravougaonika}} \\ &= \frac{\int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi}{d\pi} \\ &= \frac{2l}{d\pi}. \end{aligned}$$

Kako je, prema definiciji vjerojatnosti „a priori“, vjerojatnost događaja A jednaka količniku broja povoljnih elementarnih događaja za događaj A i broja svih mogućih elementarnih događaja, to imamo da je

$$P\{X \leq l \sin \Phi\} = \frac{k}{n} = \frac{\text{broj čačkalica koje sijeku pravac}}{\text{broj svih čačkalica}}.$$

Izjednačimo li ove dvije formule, dobijamo

$$\frac{k}{n} = \frac{2l}{d\pi}.$$

Uzmemo li sada da je dužina čačkalice jednaka polovini udaljenosti između dva susjedna pravca, tj. da je $2l = d$, dobijamo da je

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{\pi}.$$

Iz posljednje relacije slijedi da je

$$\pi = \frac{n}{k},$$

što nam daje mogućnost za vjerojatnosnu procjenu broja π , kao količnika broja n , svih čačkalica, i broja k , čačkalica koje sijeku jedan pravac.

Kako je $355/\pi \approx 113,00001$, to vidimo kako je Buffon dobio spomenuti rezultat.

Napomenimo da je Rudolf Wolf 1850. godine pomoću 5000 čačkalica za procjenu broja π dobio rezultat 3,1596; Ambrose Smith je 1855. godine pomoću 3204 čačkalice dobio rezultat 3,1553; Augustus de Morgan je 1860. godine pomoću 600 čačkalica dobio rezultat 3,137; kapetan C. O. Fox je 1864. godine, tokom Američkog građanskog rata, pomoću 1030 čačkalica dobio rezultat 3,1595; Mario Lazzarini je 1901. godine pomoću 3408 čačkalica dobio rezultat 3,1415929 gdje je tačno prvih 6 decimala broja π .

Ako pretpostavimo da imamo (pseudo)slučajni generator, algoritam Buffon(n) simulira eksperiment ispuštanja n čačkalica na drveni pod. Algoritam kao izlazni podatak vraća procjenu broja π .

```

function Buffon( $n$ )
     $k \leftarrow 0$ 
    for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
         $x \leftarrow \text{uniform}(0,d)$ 
         $\varphi \leftarrow \text{uniform}(0,\pi)$ 
        if  $x \leq l \sin \varphi$  then  $k \leftarrow k+1$ 
    return  $n/k$ 

```

Koristeći dani algoritam, eksperimentalno smo procjenjivali vrijednost broja π . Eksperiment smo ponovili 9 puta, gdje smo za broj čačkalica n redom uzimali brojeve od 10^2 do 10^{10} . Iz priložene tabele s rezultatima se vidi da smo već za $n = 10^5$ dobili tačne prve 3 decimale broja π , dok smo za $n = 10^{10}$ dobili tačnih prvih 9 decimala broja π .

$\pi \approx 3,1415926535898$		
n	Procjena broja π	Apsolutna greška
100	3,1705770450222	2,90E-02
1000	3,1433493015478	1,76E-03
10000	3,1425995394835	1,01E-03
100000	3,1411728190672	4,20E-04
1000000	3,1411804213328	4,12E-04
10000000	3,1415725018008	2,02E-05
100000000	3,1415822068513	1,04E-05

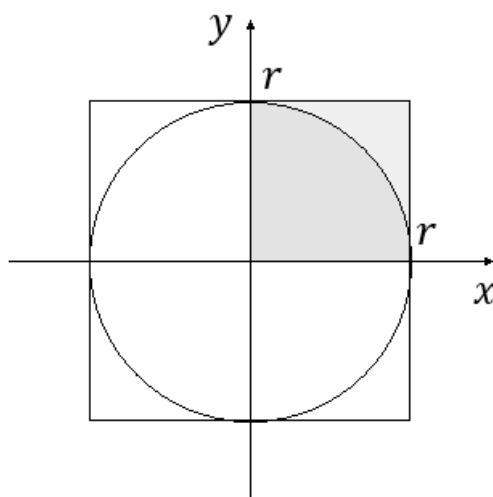
1000000000	3,1415926701914	1,66E-08
10000000000	3,1415926539372	3,47E-10

Eksperiment smo također uradili koristeći „Buffonov“ broj čačkalica. Za broj čačkalica smo uzimali redom brojeve $n = 355 \cdot 10^r$, gdje je $r = 0, 1, \dots, 10$. Iz priložene tabele s rezultatima se vidi da smo već za $n = 355 \cdot 10^3$ dobili tačne prve 3 decimale broja π , dok smo za $n = 10^{10}$ dobili tačnih prvih 5 decimala broja π .

$\pi \approx 3,1415926535898$			
n	Prosječan k	Procjena broja π	Apsolutna greška
355	116	3,0603448275862	8,12E-02
3550	113,7	3,1222515391381	1,93E-02
35500	113,120000000	3,1382602545969	3,33E-03
355000	112,991000000	3,1418431556496	2,51E-04
3550000	112,989100000	3,1418959881971	3,03E-04
35500000	113,029580000	3,1407707610698	8,22E-04
355000000	113,006377000	3,1414156388714	1,77E-04
3550000000	112,998440400	3,1416362804951	4,36E-05
35500000000	113,002120000	3,1415339818403	5,87E-05
355000000000	112,999010400	3,1416204331644	2,78E-05
3550000000000	113,000250000	3,1415900011774	2,65E-06

Dvodimenzionalni darts

Sljedećim eksperimentom ćemo procijeniti broj π simulirajući bacanje n strelica u kvadratnu metu i brojanjem k strelica koje padnu unutar kružnice upisane u taj kvadrat. Ponovo pretpostavljamo da imamo (pseudo)slučajni generator, tako da svaka tačka u kvadratu ima istu vjerojatnost da bude pogođena.



Ako je poluprečnik upisane kružnice jednak r , onda je površina kruga jednaka $r^2\pi$, a površina kvadrata je $4r^2$. Iskoristimo li geometrijsku vjerojatnost, imamo da je prosječan omjer broja strelica koje padnu u krug i svih bačenih (smatra se da sve bačene strelice pogađaju kvadratnu metu) jednak omjeru površine kruga i površine kvadrata, tj.

$$\frac{k}{n} = \frac{r^2 \pi}{4r^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Posljednja relacija nam daje mogućnost za eksperimentalnu procjenu broja π , i to prema sljedećem obracu

$$\pi = \frac{4k}{n}.$$

Sljedeći algoritam nam simulira navedeni eksperiment. Uzimamo da je $r = 1$, a zbog uniformnosti možemo simulirati bacanje strelica samo u kvadrant u kojem su obje koordinate pozitivne (osjenčeni dio).

```
function darts2(n)
  k ← 0
  for i ← 1 to n do
    x ← uniform(0,1)
    y ← uniform(0,1)
    if  $x^2 + y^2 \leq 1$  then k ← k+1
  return 4k/n
```

Koristeći dani algoritam, eksperimentalno smo procjenjivali vrijednost broja π . Eksperiment smo ponovili 9 puta, gdje smo za broj čačkalica n redom uzimali brojeve od 10^2 do 10^{10} . Iz priložene tabele s rezultatima se vidi da smo već za $n = 10^6$ dobili tačne prve 3 decimale broja π , dok smo za $n = 10^{10}$ dobili tačnih prvih 7 decimala broja π .

$\pi \approx 3,1415926535898$		
<i>n</i>	Procjena broja π	Apsolutna greška
100	3,16000000000000	1,84E-02
1000	3,15600000000000	1,44E-02
10000	3,13000000000000	1,16E-02
100000	3,13980000000000	1,79E-03
1000000	3,14198800000000	3,95E-04
10000000	3,14123520000000	3,57E-04
100000000	3,14160556000000	1,29E-05
1000000000	3,14159400800000	1,35E-06
10000000000	3,1415926924000	3,88E-08

Trodimenzijski darts

Analogno gađanju dvodimenzionalne mete u prethodnom eksperimentu, sada ćemo simulirati gađanje trodimenzionalne mete. Simuliramo bacanje n strelica u metu oblika kocke i brojimo k strelica koje padnu unutar kugle upisane u tu kocku. Ponovo pretpostavljamo da imamo (pseudo)slučajni generator, tako da svaka tačka unutar kocke ima istu vjerojatnost da bude pogodena.

Ako je poluprečnik upisane kugle jednak r , onda je zapremina kugle jednaka $4r^3\pi/3$, a zapremina kocke je $8r^3$. Iskoristimo li ponovo geometrijsku vjerojatnost, imamo da je

prosječan omjer broja strelica koje padnu u kuglu i svih bačenih (smatra se da sve bačene strelice pogađaju kocku) jednak omjeru zapremine kugle i zapremine kocke, tj.

$$\frac{k}{n} = \frac{\frac{4r^3\pi}{3}}{8r^3} = \frac{\pi}{6}.$$

Posljednja relacija nam daje mogućnost za eksperimentalnu procjenu broja π , i to prema sljedećem obracu

$$\pi = \frac{6k}{n}.$$

Analogno algoritmu *darts2*, sljedeći algoritam nam simulira navedeni eksperiment, gdje ponovo uzimamo da je $r = 1$, te simuliramo bacanje strelica samo u oktant u kojem su sve koordinate pozitivne.

```
function darts3(n)
    k ← 0
    for i ← 1 to n do
        x ← uniform(0,1)
        y ← uniform(0,1)
        z ← uniform(0,1)
        if x2 + y2 + z2 ≤ 1 then k ← k+1
    return 6k/n
```

Koristeći dani algoritam na isti način kao i prethodni, ponovo smo eksperimentalno procjenjivali vrijednost broja π . Iz priložene tabele s rezultatima se vidi da smo za $n = 10^7$ dobili tačne prve 3 decimale broja π , dok smo za $n = 10^{10}$ dobili tačnih prvih 7 njegovih decimala.

$\pi \approx 3,1415926535898$		
n	Procjena broja π	Apsolutna greška
100	3,18000000000000	3,84E-02
1000	3,17400000000000	3,24E-02
10000	3,14700000000000	5,41E-03
100000	3,13794000000000	3,65E-03
1000000	3,14620200000000	4,61E-03
10000000	3,14144640000000	1,46E-04
100000000	3,14166978000000	7,71E-05
1000000000	3,14158089000000	1,18E-05
10000000000	3,14159269320000	3,96E-08

Procjena vrijednosti brojeva $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$

Ako u algoritmu *darts2* izvršimo zamjenu „ $y \leftarrow \text{uniform}(0,1)$ “ sa „ $y \leftarrow x$ “, onda nam od kvadrata ostaje samo jedna njegova poludijagonala dužine $r\sqrt{2}$, a od kruga ostaje poluprečnik

dužine r , koji leži na toj dijagonali. Kao izlazni podatak se uzima n/k . Na taj način dobijamo mogućnost za eksperimentalnu procjenu vrijednosti broja $\sqrt{2}$, jer vrijedi

$$\frac{k}{n} = \frac{r}{r\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{n}{k}.$$

Analogno prethodno opisanom, ako u algoritmu *darts3* izvršimo zamjenu „ $y \leftarrow \text{uniform}(0,1)$ “ sa „ $y \leftarrow x$ “, te „ $z \leftarrow \text{uniform}(0,1)$ “ sa „ $z \leftarrow x$ “ onda nam od kocke ostaje samo jedna njena poludijagonala dužine $r\sqrt{3}$, a od kugle ostaje poluprečnik dužine r , koji leži na toj dijagonali. Kao izlazni podatak se uzima n/k . U ovom slučaju dobijamo mogućnost za eksperimentalnu procjenu vrijednosti broja $\sqrt{3}$, jer vrijedi

$$\frac{k}{n} = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{n}{k}.$$

n	$\sqrt{2} \approx 1,4142135623731$		$\sqrt{3} \approx 1,7320508075689$	
	Procjena broja $\sqrt{2}$	Apsolutna greška	Procjena broja $\sqrt{3}$	Apsolutna greška
100	1,2987012987013	1,16E-01	1,754385964912	2,23E-02
1000	1,4025245441795	1,17E-02	1,733102253033	1,05E-03
10000	1,4037057832678	1,05E-02	1,731002250303	1,05E-03
100000	1,4174143527377	3,20E-03	1,732021615630	2,92E-05
1000000	1,4142431253642	2,96E-05	1,730756582933	1,29E-03
10000000	1,4141827254186	3,08E-05	1,732035115280	1,57E-05
100000000	1,4141822654388	3,13E-05	1,732099616513	4,88E-05
1000000000	1,4142112227501	2,34E-06	1,732048603141	2,20E-06
10000000000	1,4142132765463	2,86E-07	1,732050804838	2,73E-09

Iz tabele možemo iščitati da smo kod procjene broja $\sqrt{2}$ za $n = 10^{10}$ dobili tačnih prvih 6 decimala, dok smo kod procjene broja $\sqrt{3}$, za isti n , dobili tačnih prvih 8 decimala.

Suma dva kvadrata

Pogledamo li pravougaonik s vrhovima u tačkama $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,b)$ i $D(0,b)$, onda njegova dijagonala $\overline{AC}$ leži na pravcu čija je jednačina $y = \frac{b}{a}x$. Dužina te dijagonale je $\sqrt{a^2 + b^2}$. Pogledamo li na toj dijagonali odsječak dužine 1, tj. skup tačaka na njoj za čije koordinate vrijedi da je $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$, tada dobijamo mogućnost za procjenu vrijednosti broja $\sqrt{a^2 + b^2}$, jer vrijedi

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{n}{k},$$

gdje je n broj pogodaka na dijagonalu pravougaonika, što je u stvari broj svih bačenih strelica, a k je broj pogodaka na navedeni dio dijagonale čija je dužina jednaka 1.

Da bismo to proveli, jednostavno u algoritmu *darts2* izvršimo zamjenu „ $x \leftarrow \text{uniform}(0,1)$ “ sa „ $x \leftarrow \text{uniform}(0,a)$ “, te „ $y \leftarrow \text{uniform}(0,1)$ “ sa „ $y \leftarrow bx/a$ “, a kao izlazni podatak uzimamo n/k .

Pogledajmo sada koji se prirodni brojevi mogu predstaviti kao suma kvadrata dva prirodna broja.

Teorem 1: Prirodan broj se može prikazati u obliku sume kvadrata dva prirodna broja ako i samo ako u njegovom rastavu na proste faktore

- a) nema prostih faktora oblika $4k + 3$, a ako ih ima onda oni svi imaju parne eksponente i
- b) prosti faktor 2 ima neparan eksponent ili postoji bar jedan prosti faktor oblika $4k + 1$.

Uzimajući odgovarajuće parametre a i b možemo vjerojatnosno procjenjivati vrijednost brojeva $\sqrt{a^2 + b^2}$. Tako za $a = 1$ i $b = 2$ možemo eksperimentalno procijeniti vrijednost $\sqrt{5}$.

$\sqrt{5} \approx 2,2360679774998$		
n	Procjena broja $\sqrt{5}$	Apsolutna greška
100	2,2727272727273	3,67E-02
1000	2,2471910112360	1,11E-02
10000	2,2461814914645	1,01E-02
100000	2,2478982151688	1,18E-02
1000000	2,2369012654150	8,33E-04
10000000	2,2361289566625	6,10E-05
100000000	2,2361400573230	7,21E-05
1000000000	2,2360684549997	4,77E-07
10000000000	2,2360679489996	2,85E-08

Iz dane tabele s rezultatima se vidi da smo za $n = 10^6$ dobili tačne prve 3 decimale broja $\sqrt{5}$, dok smo za $n = 10^{10}$ dobili tačnih prvih 7 decimala.

Suma tri kvadrata

Analogno prethodnom poglavlju, pogledamo li kvadar čija dva suprotna vrha imaju koordinate u tačkama $A(0,0,0)$ i $G(a,b,c)$ onda njegova dijagonala $\overline{AG}$ leži na pravcu čija je jednačina $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Dužina te dijagonale je $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Pogledamo li na toj dijagonali odsječak dužine 1, tj. skup tačaka na njoj za čije koordinate vrijedi da je $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1$, tada dobijamo mogućnost za procjenu vrijednosti broja $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, jer vrijedi

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{n}{k},$$

gdje je n broj pogodaka na dijagonalu kvadra, što je u stvari broj svih bačenih strelica, a k je broj pogodaka na navedeni dio dijagonale čija je dužina jednaka 1.

Da bismo to proveli, jednostavno u algoritmu *darts3* izvršimo zamjenu „ $x \leftarrow \text{uniform}(0,1)$ “ sa „ $x \leftarrow \text{uniform}(0,a)$ “ i „ $y \leftarrow \text{uniform}(0,1)$ “ sa „ $y \leftarrow bx/a$ “ te „ $z \leftarrow \text{uniform}(0,1)$ “ sa „ $z \leftarrow cx/a$ “, a kao izlazni podatak uzimamo n/k .

Pogledajmo sada koji se prirodni brojevi mogu predstaviti kao suma kvadrata tri cijela broja.

Teorem 2: Prirodan broj se može prikazati u obliku sume kvadrata tri cijela broja ako i samo ako nije oblika $4^m(8k + 7)$, gdje su k i m nenegativni cijeli brojevi.

Uzimajući odgovarajuće parametre a , b i c možemo vjerojatnosno procjenjivati vrijednost brojeva $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Tako za $a = b = 1$ i $c = 3$ možemo eksperimentalno procijeniti vrijednost $\sqrt{11}$.

$\sqrt{11} \approx 3,3166247903554$		
n	Procjena broja $\sqrt{11}$	Apsolutna greška
100	3,5714285714286	2,55E-01
1000	3,3557046979866	3,91E-02
10000	3,3444816053512	2,79E-02
100000	3,3297815663293	1,32E-02
1000000	3,3166725813994	4,78E-05
10000000	3,3165922810295	3,25E-05
100000000	3,3166282507144	3,46E-06
1000000000	3,3166247527108	3,76E-08
10000000000	3,3166247450108	4,53E-08

Iz dane tabele s rezultatima se vidi da smo za $n = 10^6$ dobili tačne prve 4 decimale broja $\sqrt{11}$, dok smo za $n = 10^9$ dobili tačnih prvih 7 decimala.

Literatura

1. P. Beckmann: *A History of π* , St. Martin's Press, New York, 1974.
2. J. Havil: *Nonplussed! Mathematical Proff of Implausible Ideas*, Princeton University Press, New Jersey, 2007.
3. B. Ibrahimpašić: *Vjerojatnosni algoritmi*, Naša škola, 33(2005), 15–24.
4. B. Ibrahimpašić: *Uvod u teoriju brojeva*, Pedagoški fakultet, Bihać, 2014.
5. B. Ibrahimpašić, E. Liđan: *Vjerojatnosna procjena vrijednosti broja π* , Metodčki aspekti nastave matematike 2(2011), 471–474.
6. D. E. Knuth: *The Art of Programming. Vol 2, Seminumerical Algorithms*, Adison Wesley Longman, Reading, 1998.
7. PARI/GP, Version 2.12.1, Bordeaux, 2020., <https://pari.math.u-bordeaux.fr>
8. N. Sarapa: *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

A DIFFERENT ESTIMATION OF THE VALUE OF SOME IRRATIONAL NUMBERS

Abstract

An irrational number is a real number that cannot be written as a ratio of two integers. When an irrational number is written with a decimal point, the numbers after the decimal point continue infinitely with no repeatable pattern. We want to approximate an irrational number with a rational. A probabilistic algorithm is an algorithm where result or the way the result is obtained depends on chance. These algorithms are also sometimes called randomized algorithms. In this paper we will estimate the value of number π and some other irrational numbers by using some probabilistic algorithms. The way we will do it is by a simple experiment of throwing away toothpicks on the wooden floor and shooting at the target with darts.

Keywords: *Irrational numbers, Probabilistic algorithms, Buffon's problem*