

Dr. sc. Štefko Miklavič
Dr. sc. Dževad Zečić
Dr. sc. Hermina Alajbegović
Dr. sc. Almir Huskanović

TEORIJA GRAFOVA I PRIMJENE

Sažetak

U ovom radu predstavljamo teoriju grafova i njen značaj u matematici i drugim oblastima nauke i društvenog života. Grafovi se često upotrebljavaju za opis i grafički prikaz apstraktnih modela i struktura podataka. Takav pristup olakšava njihovo razumijevanje. Budući da teorija grafova ima veliku primjenu u informatici, njen razvoj zadnjih decenija je ubrzan. Kroz ovaj rad ćemo prezentovati nekoliko jednostavnijih primjera primjene teorije grafova u različitim oblastima, sa ciljem popularizacije teorije grafova.

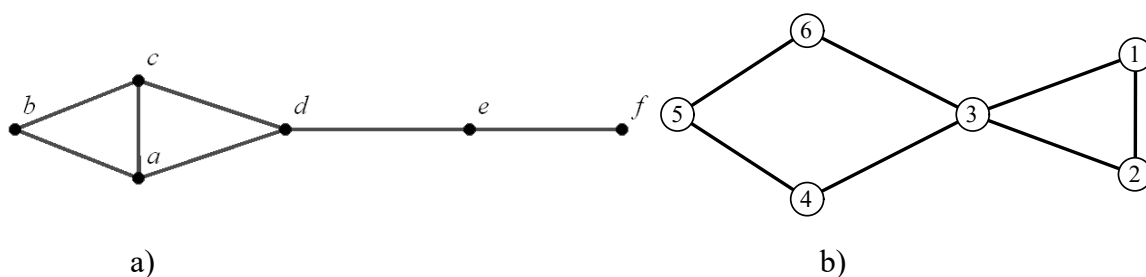
Ključne riječi: graf, problem Königsberških mostova, problem četiri boje

Uvod

Graf se u matematici definiše uvijek kao uređeni par (V, E) , gdje je V skup vrhova (čvorova) grafa, a E je skup ivica. Graf se obično označava slovom G ili Γ . Vrhove obilježavamo malim slovima latinice, npr. $a, b, c, x, y, z, \dots$ ili brojevima $1, 2, 3, \dots$, a svaka ivica grafa je određena sa po dva vrha, npr. $e = \{x, y\}$. Ako ta ivica pripada grafu G , kažemo da su vrhovi x i y susjedni u grafu G i da je ivica e incidentna sa tim vrhovima, odnosno da su vrhovi x i y krajevi ivice e . Pod stepenom nekog vrha podrazumijevamo broj njemu susjednih vrhova. Grafovi se mogu predstaviti crtežom na kome su vrhovi prikazani tačkama ili kružićima, a ivice linijama koje spajaju odgovarajuće vrhove. U slučaju tzv. jednostavnog grafa, krajevi svake ivice su uvijek dva različita vrha, tj. nijedan vrh nije povezan sa samim sobom (tada imamo tzv. petlju) i dva vrha grafa ne mogu biti spojena sa više od jedne ivice.

Niz ivica grafa koje su povezane jedna sa drugom zove se šetnja, a ako su u šetnji sve ivice različite, onda tu šetnju zovemo stazom.

Graf je neorijentisan ako je $\{x, y\} = \{y, x\}$ (sl. 1.), dok se u slučaju orijentisanog grafa, za svaku ivicu posebno određuje početni i završni vrh.



Sl. 1. Primjeri jednostavnih neorijentisanih grafova

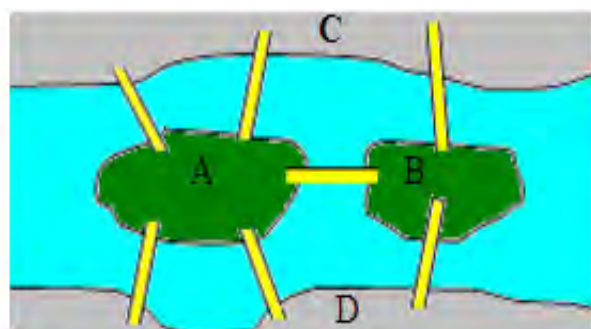
U nastavku ćemo prezentovati nekoliko poznatih matematičkih problema koji su riješeni upravo uz pomoć teorije grafova.

Königsberški mostovi

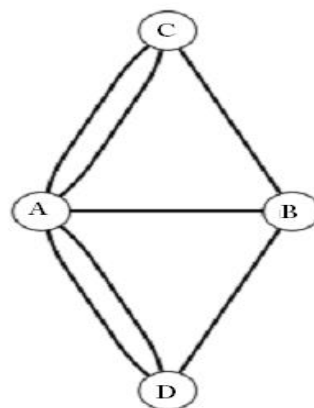
Može se reći da je teorija grafova začeta u 18. vijeku od strane poznatog švajcarskog matematičara Leonharda Eulera, koji je želio da riješi tzv. problem Königsberških mostova (Königsberg – grad u Pruskoj, u današnje vrijeme Kalinjingrad u Rusiji). Rijeka Pregel dijeli ovaj grad na četiri kopnena dijela A, B, C i D, koji se sastoje od dva otoka i dva priobalna dijela, koji su međusobno povezani sa 7 mostova, kao na slici 1.a.). Postavlja se pitanje možemo li, polazeći sa jednog od ta četiri dijela, napraviti obilazak svih dijelova, ali tako da se svaki od mostova prijeđe samo jednom?

Očito je sljedeće: Ako neki od dijelova nije ni početak ni kraj šetnje, on mora biti povezan sa ostalim dijelovima kopna sa parnim brojem mostova, jer za svaki most kojim dođemo na taj dio treba postojati most kojim odlazimo na neki drugi dio. Otuda, ako je neki od dijelova povezan sa ostalim dijelovima neparnim brojem mostova, taj dio je ili početak ili kraj šetnje. U našem slučaju, svaki od dijelova A, B, C, D povezan je neparnim brojem mostova prema ostalim dijelovima i zbog toga opisana šetnja nije moguća.

Euler je ovaj zadatak riješio pomoću grafova, tako što je postavio ekvivalentan zadatak: može li se graf na sl.2.b. (koji upravo odgovara situaciji na sl.2.a.) nacrtati u jednom potezu, tj. obići cijeli graf tako da obilazak počnemo iz jednog vrha i svaku ivicu pređemo tačno jednom? Poslije iscrpljivanja svih mogućnosti, jasno je da je odgovor negativan.



a) Königsberg 1750 b) Eulerova grafička reprezentacija



Sl. 2.

U teoriji grafova, za stazu nekog grafa kažemo da je Eulerova ako ona prolazi svakom ivicom tog grafa (tačno jednom), a ukoliko je ta staza zatvorena, onda je nazivamo Eulerova tura. Za graf G kažemo da je Eulerov ako u njemu postoji Eulerova tura. Postoji efikasna karakterizacija Eulerovih grafova. Najčešće korišteni algoritmi za pronalaženje Eulerove staze, odnosno Eulerove ture, su Fleuryjev i Hierholzerov algoritam ([5]).

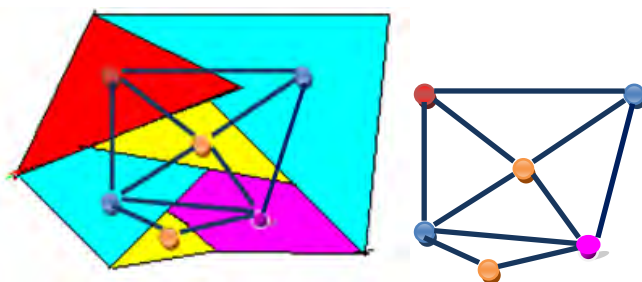
Očito je da graf ne može imati Eulerovu stazu ako je broj njegovih vrhova neparnog stepena veći od 2. Inače, u svakom neorijentisanom grafu, broj vrhova neparnog stepena mora biti paran. Eulerova tura se može uvijek naći u grafu ako bi svi vrhovi tog grafa bili parnog stepena, a Eulerova staza sigurno postoji ukoliko bismo u grafu imali tačno dva vrha neparnog stepena. U tom slučaju svaka Eulerova staza bi započinjala u jednom od tih vrhova neparnog stepena, a završavala u drugom.

Postoje i mnogi drugi problemi koji bi se mogli rješavati pomoću teorije grafova.

Problem četiri boje

Ovaj problem postavio je Francis Guthrie 1852. godine. On se bavio bojenjem geografskih karata. Ukoliko imamo geografsku kartu nacrtanu u ravni ili na sferi, na kojoj su nacrtane granice država (ili nekih manjih područja, npr. općine i sl.), ali tako da se svaka država sastoji samo od jedne regije na karti, a ne od više nepovezanih regija, postavlja se pitanje koliko nam najmanje boja treba da obojimo tu kartu tako da države koje imaju zajedničku granicu budu obojene različitim bojama? Guthrie je primijetio da mu ne treba više od četiri boje i pokušao je to i da dokaže u općem slučaju. Tim problemom su se bavili i mnogi drugi matematičari, kao i nematematičari. Percy John Heawood je 1890. godine dokazao da se svaka karta može obojiti na opisani način sa 5 boja. Tek 1976. godine dokazano je da se bojenje karte može obaviti sa četiri boje, ali dokaz je izveden pomoću računara, svodeći problem na proučavanje 1936 tipova geografskih karata. Godine 1997. taj je dokaz značajno redukovan, jer je broj karata, koje trebaju da se provjere pomoću računara, sveden na 633.

Problem četiri boje se prilagođava u teoriji grafova na sljedeći način: svaku državu (regiju) na karti predstavimo jednim vrhom grafa (sl. 3.), a ako dvije države imaju zajedničku granicu, onda će na grafu odgovarajući vrhovi biti spojeni ivicom.



Sl. 3.

U teoriji grafova kažemo da je graf ravan (planaran) ako se može nacrtati u ravni tako da mu se ivice ne sijeku, tj. ako dvije ivice tog grafa imaju zajedničku tačku, onda je ta tačka vrh grafa. Bojenje vrhova grafa se obavlja na način da svakom vrhu pridružimo neku boju, ali tako da su susjednim vrhovima pridružene različite boje. Ako na taj način obojimo vrhove grafa koristeći k boja, reći ćemo da je graf k – obojiv. Kromatski broj $\chi(G)$ grafa G je najmanji cijeli broj k takav da sve vrhove grafa G možemo obojiti sa tačno k boja. Dakle, ako je $\chi(G) = k$, tada je graf G k – obojiv, a nije $(k - 1)$ – obojiv.

Problem četiri boje iskazan na jeziku grafova onda glasi:

Svaki ravni graf je 4 – obojiv.

Algoritmi za pronalaženje kromatskog broja grafa se dijele na egzaktne i heurističke (određuje se približna vrijednost kromatskog broja). Egzaktni algoritmi ([1],[4]) su pogodni samo za grafove sa malim brojem čvorova i ivica, jer imaju veliko vrijeme izvršavanja, zbog toga su razvijeni mnogi heuristički metodi ([2],[4]).

Problem rasporeda sesija

Pretpostavimo da se održava naučni kongres na kome naučnici izlažu svoje rezultate u nekoliko sesija (sjednica). Treba napraviti raspored održavanja sesija tako da se ne desi da se istovremeno održavaju dvije sesije u kojima bi isti naučnik trebao izlagati svoje rezultate. Označimo slovom N skup svih naučnika, a slovom S skup svih sesija. Za svaku sesiju x označimo sa N_x skup svih naučnika koji bi trebalo da učestvuju na sesiji x .

Tada, što se tiče rasporeda vremena sesija, prihvatamo uslov: sesije x i y održavaju se u različitim terminima ako i samo ako je $N_x \cap N_y \neq \emptyset$. Formirat ćemo graf G čiji je skup vrhova upravo skup S , tako da su vrhovi x i y susjedni (tj. u grafu G definisana je ivica $\{x, y\}$) ako i samo ako je $N_x \cap N_y \neq \emptyset$.

Sada obojimo vrhove grafa G tako da su dva vrha obojena istom bojom ukoliko se te sesije mogu održavati u istom terminu. U tom slučaju najmanji broj sesija koje se mogu održavati istovremeno je kromatski broj $\chi(G)$ grafa G ([3], [5]).

Literatura

1. Brelaz D., New Methods to Color the Vertices of a Graph, *Communications of the ACM* 22 (4), 1979, 251–256.
2. de Werra D., Heuristics for Graph Coloring, *Computing* 7, 1990, 191–208.
3. Divjak B., Lovrenčić A.: *Diskretna matematika s teorijom grafova*, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 2005.
4. R.M.R. Lewis, *A Guide to Graph Colouring. Algorithms and Applications*, Springer International Publishing Switzerland, 2016.
5. Veljan D., *Kombinatorika sa teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

GRAPH THEORY WITH APPLICATIONS

Abstract

In this paper we present the graph theory and their significance in mathematics and other fields of science and social life. Graphs are often used to describe and graphically depict abstract models and data structures. This approach facilitates their understanding. Since graph theory has a great application in computer science, its development in recent decades has accelerated. Through this paper, we will present a few simpler examples of the use of graph theory in different domains, with the desire to popularize the graph theory.

Key words: graph, Königsberg Bridge problem, four colors problem