

**Almir Huskanović**

**Hermina Alajbegović**

**Bakir Pojskić**

## **UTJECAJ MODELA “IZVRNUTE UČIONICE” NA POSTIGNUĆA UČENIKA U NASTAVI MATEMATIKE**

### ***Sažetak***

*Rad analizira mogućnosti i ograničenja primjene modela “izvrnute učionice” u nastavi matematike u osnovnoj školi, s posebnim naglaskom na učenička postignuća, angažman i kvalitet rješavanja zadataka. Istraživanje je provedeno na uzorku od 80 učenika sedmog i osmog razreda, primjenom kvazi-eksperimentalnog dizajna s predtestom i posttestom. U teorijskom dijelu razmatraju se konstruktivizam, samoregulirano učenje, složenost zadataka, matematička pismenost i nalazi PISA testiranja kao argumenti za modernizaciju nastave matematike. Rezultati pokazuju da izvrnuta učionica može doprinijeti boljem angažmanu učenika i kvalitetu rješavanja zadataka, ali da efekti zavise od uzrasta. U sedmom razredu eksperimentalna grupa ostvarila je statistički značajno bolje rezultate od kontrolne ( $p < 0,001$ ), dok u osmom razredu nije utvrđena značajna razlika između grupa. Analiza individualnih promjena otkriva heterogenost efekata – dio učenika napreduje, dio stagnira, a dio nazaduje, što upućuje na potrebu za dodatnim praćenjem i podrškom.*

***Ključne riječi:*** *izvrnuta učionica, matematika, osnovna škola, matematička pismenost, samoregulirano učenje, kognitivno opterećenje, učenička postignuća*

## **UVOD**

Savremeni obrazovni kontekst obilježen je ubrzanim tehnološkim promjenama i potrebom da škola razvija kompetencije koje nadilaze reprodukciju sadržaja. U nastavi matematike to posebno dolazi do izražaja, jer se od učenika ne očekuje samo tačan rezultat, nego i razumijevanje postupka, sposobnost primjene znanja u novim situacijama i samostalno rješavanje problema. Tradicionalni model nastave, u kojem nastavnik dominantno objašnjava novo gradivo na času, a učenici kod kuće vježbaju ono što su čuli, često ostavlja malo prostora za individualiziranu podršku i dublju raspravu o greškama.

Model izvrsne učionice nudi drugačiju organizaciju nastavnog vremena. Osnovne informacije i uvodna objašnjenja učenici usvajaju prije časa, najčešće kroz kratke videolekcije ili pisane materijale, dok se vrijeme u učionici koristi za analizu, rješavanje složenijih zadataka, diskusiju i povratnu informaciju. Uloga nastavnika se mijenja: on postaje organizator procesa učenja, mentor i podrška učenicima pri prevazilaženju poteškoća.

Za nastavu matematike ovaj pristup je posebno zanimljiv jer su razumijevanje relacija, uočavanje obrazaca i postepena izgradnja pojmova od presudne važnosti. Učenici često imaju poteškoće kada se od njih traži da samostalno primijene novo gradivo bez podrške nastavnika. Izvrsna učionica pokušava upravo to preokrenuti: u učionici, gdje je podrška dostupna, rješavaju se zahtjevniji zadaci, a inicijalno upoznavanje sa sadržajem premješta se u kućno okruženje, gdje učenik može pauzirati, ponoviti ili usporiti tempo prema vlastitim potrebama.

Cilj ovog rada jeste da, na osnovu teorijskih izvora i empirijskih nalaza, ispita u kojoj mjeri model izvrsne učionice može doprinijeti poboljšanju učeničkih postignuća u matematici, s posebnim osvrtom na odnos između predznanja i završnog postignuća, angažman učenika i pedagoške uslove koji određuju uspješnost implementacije.

## **TEORIJSKI OKVIR**

Teorijsko uporište modela izvrsne učionice nalazi se prvenstveno u konstruktivističkom razumijevanju učenja. Prema konstruktivizmu [8, 14], znanje nije gotov proizvod koji nastavnik prenosi učeniku, nego rezultat aktivne izgradnje značenja na osnovu prethodnih iskustava, novih informacija i socijalne interakcije. Izvrsna učionica nije samo tehnička reorganizacija časa, nego način da se nastava približi ideji aktivnog i interaktivnog učenja.

Drugi važan teorijski oslonac predstavlja teorija samoreguliranog učenja [16]. Uspješan učenik planira vlastiti rad, prati razumijevanje i prilagođava strategije kada je to potrebno. Izvrsna

učionica od učenika traži upravo takve procese: da organizuje vrijeme za pripremu, prepozna dijelove koje nije razumio i dođe spreman da traži pojašnjenje.

Pored konstruktivizma i teorije samoreguliranog učenja, važan teorijski okvir za razumijevanje potencijala izvrsne učionice temelji se na principima optimizacije učenja [13]. Prema Swelleru, učenici bolje usvajaju kompleksne sadržaje kada ih mogu pratiti vlastitim tempom, u manjim cjelinama i uz mogućnost ponavljanja. Izvrsna učionica omogućava upravo to – učenik kod kuće može pauzirati video, vratiti se na nejasne dijelove i prilagoditi tempo prema vlastitim potrebama, čime se stvara prostor za dublje razumijevanje gradiva u učionici. Posebno je značajno da ovakav pristup može podržati učenike sa slabijim predznanjem.

Vygotsky [14] je posebno naglašavao značaj socijalne interakcije u učenju – ono što učenik ne može postići samostalno, može uz podršku kompetentnijeg drugog. U tom smislu, izvrsna učionica stvara uslove za vršnjačko podučavanje: učenici koji su bolje razumjeli gradivo mogu pomoći onima koji imaju poteškoća, čime se ne samo podržava napredak onih koji zaostaju, već se i kod onih koji pomažu produbljuje razumijevanje kroz objašnjavanje.

Bergmann i Sams [1] pokazali su da već sama mogućnost da učenik više puta pregleda objašnjenje može smanjiti frustraciju i povećati dostupnost nastavnog sadržaja. Kasnija istraživanja [3, 5, 11] ukazala su na umjereno pozitivne efekte modela, posebno kada je riječ o angažmanu, kvalitetu interakcije i postignućima u STEM područjima. Međutim, učinak izvrsne učionice nije linearan – zavisi od kvaliteta videosadržaja, jasnoće uputa, pristupa tehnologiji i sposobnosti nastavnika da učionicu organizuje kao prostor aktivnog rada [15].

Posebno važan argument za modernizaciju nastave matematike dolazi iz istraživanja matematičke pismenosti. Rezultati PISA testiranja [6, 2] upozoravaju da učenici često imaju teškoće ne samo s računskim postupcima nego i sa razumijevanjem problema i prenošenjem znanja u realne situacije. Tradicionalna nastava, usmjerena pretežno na reprodukciju algoritama, teško odgovara na takve zahtjeve. Dodatni razlog za traženje alternativnih modela jeste matematička anksioznost [4], koja može umanjiti radni učinak i pojačati izbjegavanje zahtjevnijih zadataka.

Važno je naglasiti da izvrsna učionica nije sinonim za puku upotrebu tehnologije – njena pedagoška vrijednost proizlazi iz promišljene integracije digitalne pripreme i kvalitetnih aktivnosti licem u lice.

## **METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA**

### **Dizajn i uzorak**

Istraživanje je zasnovano na kvazi-eksperimentalnom dizajnu s predtestom i posttestom, što omogućava poređenje dvaju nastavnih pristupa u realnim školskim uslovima. Uzorak je obuhvatio 80 učenika jedne osnovne škole: 40 učenika sedmog razreda i 40 učenika osmog razreda.

**Tabela 1: Struktura uzorka prema razredu i pripadnosti grupi**

Razred	Eksperimentalna grupa	Kontrolna grupa	Ukupno
<b>7. razred</b>	20	20	40
<b>8. razred</b>	20	20	40
<b>Ukupno</b>	<b>40</b>	<b>40</b>	<b>80</b>

### **Procedura**

Kontrolna grupa radila je prema tradicionalnom modelu: nastavnik je na času uvodio novo gradivo i objašnjavao postupke, dok su učenici kod kuće dobijali domaću zadaću za individualnu vježbu. Eksperimentalna grupa pratila je model izvrnute učionice. Prije časa učenici su dobijali videolekcije (trajanja 10–15 minuta), prezentacije i pisane materijale za individualnu pripremu. Vrijeme u učionici bilo je usmjereno na rješavanje zadataka, zajedničku analizu postupka, razgovor o greškama i neposrednu podršku nastavnika.

Aktivnosti su trajale šest sedmica, a obrađivane su tematske cjeline primjerene sedmom i osmom razredu (algebarski sadržaji, linearne jednačine, tekstualni zadaci).

### **Instrumenti i analiza podataka**

Za procjenu postignuća korišteni su predtest i posttest sa zadacima koji su omogućavali razlikovanje tačnih, djelimično tačnih i netačnih odgovora. Maksimalan broj bodova na testovima bio je 50.

U analizi podataka primijenjene su deskriptivna statistika, analiza kovarijance (ANCOVA) i t-testovi za zavisne uzorke. ANCOVA je korištena za procjenu efekta grupe (eksperimentalna / kontrolna) nakon statističke kontrole predtesta. S obzirom na pretpostavku da efekat tretmana može zavisiti od uzrasta, analiza je provedena odvojeno za 7. i 8. razred, a dodatno je primijenjen i **dvofaktorski ANCOVA model** s faktorima razreda, grupe i njihove interakcije kako bi se direktno testiralo postojanje razlike u efektu između razreda. T-testovima za zavisne uzorke procijenjena je promjena unutar svake grupe.

Sve analize urađene su u programskom jeziku Python korištenjem biblioteka: pandas, statsmodels, scipy i matplotlib, dok su grafovi dodatno vizualizirani radi preglednosti.

Istraživanje je testiralo sljedeće hipoteze:

- **H1: Model izvrnute učionice pozitivno utječe na rješavanje matematičkih zadataka u odnosu na tradicionalnu nastavu.**
- **H2: Primjena modela doprinosi većem angažmanu učenika i kvalitetu rješavanja zadataka.**

### **Analiza individualnih promjena**

Pored navedenih analiza, urađena je i analiza individualnih promjena na nivou svakog učenika. Na osnovu razlike između posttesta i predtesta, učenici su klasifikovani u tri kategorije:

- Napredak: razlika veća od +5% (odabrani prag)
- Stagnacija: razlika u rasponu od -5% do +5%
- Nazadovanje: razlika manja od -5%

Prag od 5% odabran je kao mjera koja prelazi moguću slučajnu varijaciju u rezultatima i omogućava uočavanje suštinskih promjena u postignuću učenika.

### **Analiza efektnih veličina (dopuna metodologije)**

Pored deskriptivne statistike, ANCOVA i t-testova, urađena je analiza **efektnih veličina** kako bi se dodatno procijenila jačina promjena unutar i između grupa. Za ovu svrhu korišten je Cohenov *d*, koji omogućava interpretaciju efekta nezavisno od veličine uzorka, što je posebno važno s obzirom na mali broj učenika i heterogenost postignuća.

**Cohenov *d* između grupa** procjenjuje razliku u posttestu između eksperimentalne i kontrolne grupe. **Upareni Cohenov *d*** procjenjuje promjenu unutar iste grupe od predtesta do posttesta.

Ova analiza omogućava uočavanje malih, ali pedagoški značajnih efekata koji se možda ne bi pokazali statistički značajnim zbog veličine uzorka.

### **Ograničenja**

Grupe nisu formirane slučajnim rasporedom, uzorak je relativno mali, a trajanje intervencije ograničeno na šest sedmica. Također, istraživanje nije sistematski prikupljalo podatke o socio-ekonomskom statusu učenika, pa se njegov uticaj ne može precizno procijeniti.

## **REZULTATI ISTRAŽIVANJA**

### **Deskriptivni pokazatelji**

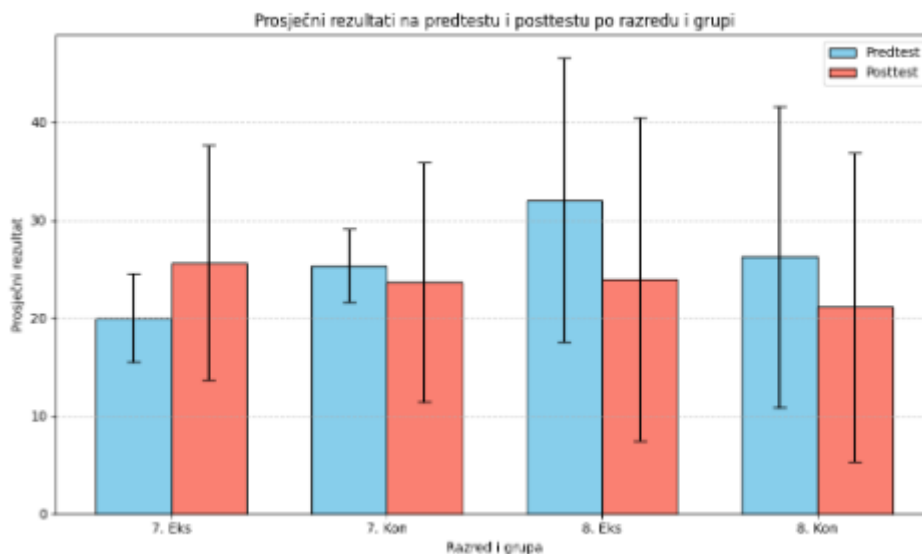
Deskriptivna analiza pokazala je da između grupa nisu postojale potpuno iste početne pozicije, zbog čega je kontrola predznanja bila posebno važna u interpretaciji rezultata. U sedmom razredu

kontrolna grupa je na predtestu imala viši prosječni rezultat od eksperimentalne, dok je u osmom razredu eksperimentalna grupa startovala s višim prosjekom od kontrolne.

**Tabela 2: Deskriptivni pokazatelji na predtestu i posttestu po razredu i grupi**

Razred	Grupa	<i>n</i>	Predtest M	Predtest SD	Posttest M	Posttest SD
7	Eksperimentalna	20	20,00	4,50	25,65	12,01
7	Kontrolna	20	25,35	3,76	23,65	12,24
8	Eksperimentalna	20	32,05	14,54	23,95	16,55
8	Kontrolna	20	26,25	15,40	21,10	15,81

U sedmom razredu eksperimentalna grupa bilježi napredak od 5,65 bodova, dok kontrolna grupa ima blagi pad od 1,70 bodova. U osmom razredu obje grupe ostvaruju niže rezultate na posttestu, pri čemu je pad izraženiji u eksperimentalnoj grupi (8,10 bodova) nego u kontrolnoj (5,15 bodova). Dok u sedmom razredu dolazi do izrazitog povećanja standardnih devijacija na posttestu (eksperimentalna: 4,50 → 12,01; kontrolna: 3,76 → 12,24) – što upućuje na veću heterogenost nakon tretmana – u osmom razredu one ostaju na sličnom nivou (eksperimentalna: 14,54 → 16,55; kontrolna: 15,40 → 15,81), što sugerira zadržavanje početne varijabilnosti.



**Slika 1: Uporedni prikaz prosječnih rezultata na predtestu i posttestu**

### Provjera pretpostavki za parametrijsku analizu

Prije primjene ANCOVA-e provjerene su sve potrebne pretpostavke, kako unutar pojedinačnih razreda tako i u zajedničkom modelu.

Normalnost reziduala testirana je Shapiro–Wilkovim testom po grupama; ni u jednoj grupi nije utvrđeno odstupanje od normalne distribucije ( $p > 0,05$  za sve grupe, najniži  $p = 0,619$ ). Homogenost regresijskih nagiba provjerena je testom interakcije grupe i predtesta unutar svakog razreda. U 7. razredu interakcija nije bila statistički značajna ( $F = 0,48$ ;  $p = 0,49$ ), a isto vrijedi i za 8. razred ( $F = 0,16$ ;  $p = 0,70$ ). Dodatno, u zajedničkom modelu s faktorima razreda, grupe i njihovom interakcijom, trostruka interakcija (razred  $\times$  grupa  $\times$  predtest) također nije bila značajna ( $F = 0,50$ ;  $p = 0,48$ ), čime je potvrđena homogenost nagiba na svim nivoima. Homogenost varijansi potvrđena je Leveneovim testom, kako za faktor grupe ( $F = 0,07$ ;  $p = 0,79$ ), tako i za kombinaciju razreda i grupe (7. razred:  $F = 0,002$ ;  $p = 0,96$ ; 8. razred:  $F = 0,16$ ;  $p = 0,69$ ). Linearnost veze između predtesta i posttesta utvrđena je grafičkom inspekcijom rasipnih dijagrama.

Time su zadovoljeni svi uvjeti za korektnu primjenu parametrijske ANCOVA-e.

#### **ANCOVA analiza – efekat između grupa**

Kako bismo istovremeno procijenili efekat grupe, razreda i njihove interakcije uz kontrolu predznanja, primijenjena je **dvofaktorska ANCOVA** s predtestom kao kovarijatom. Model uključuje glavne efekte grupe (eksperimentalna / kontrolna), razreda (7 / 8) i njihovu interakciju, uz kontrolu predtesta.

Rezultati su prikazani u Tabeli 3. Predtest se pokazao kao izuzetno snažan prediktor posttesta ( $F = 174,34$ ;  $p < 0,001$ ). Interakcija razreda i grupe je statistički značajna ( $F = 9,57$ ;  $p = 0,003$ ), što ukazuje da se efekat tretmana razlikuje između 7. i 8. razreda. Glavni efekat grupe nije značajan ( $F = 1,54$ ;  $p = 0,218$ ), jer se efekat tretmana manifestira samo u jednom razredu.

**Tabela 3: Rezultati dvofaktorske ANCOVA-e s predtestom kao kovarijatom**

Izvor varijabiliteta	<i>F</i>	<i>p</i>
<b>Predtest</b>	174.34	<0,001
<b>Razred</b>	22.66	<0.001
<b>Grupa</b>	1.54	0,218
<b>Razred <math>\times</math> Grupa</b>	9.57	0.003

\*Napomena:  $df = 1$  za sve efekte,  $df$  residua = 75.

Radi detaljnijeg uvida, izračunati su jednostavni efekti grupe unutar svakog razreda. U 7. razredu eksperimentalna grupa postigla je statistički značajno bolje rezultate od kontrolne ( $F = 51,70$ ;  $p < 0,001$ ). Prilagođeni prosječni rezultati na posttestu (uz kontrolu početnog znanja) iznose 32,55 za

eksperimentalnu i 16,75 za kontrolnu grupu. U 8. razredu razlika među grupama nije statistički značajna ( $F = 1,49$ ;  $p = 0,23$ ); prilagođeni prosjeci iznose 21,12 za eksperimentalnu i 23,93 za kontrolnu grupu. Ovi nalazi potvrđuju da efekat tretmana zavisi od uzrasta učenika.

Prilagođeni prosjeci dobiveni su iz modela  $\text{posttest} \sim \text{grupa} + \text{predtest}$  unutar svakog razreda, pri čemu je predtest fiksiran na prosječnu vrijednost unutar razreda. Razlike između prilagođenih i sirovih prosjeka posljedica su razlika u početnom znanju među grupama i snažnog utjecaja predtesta na posttest.

### **Analiza promjene unutar grupa**

Prije primjene t-testa za zavisne uzorke, provjerena je normalnost distribucije razlika između posttesta i predtesta Shapiro–Wilk testom. Normalnost je potvrđena za sve četiri grupe (najniža p-vrijednost iznosi 0,0532 za eksperimentalnu grupu sedmog razreda, što se i dalje smatra prihvatljivim), čime su ispunjeni uslovi za korištenje parametrijskog testa.

T-testovima za zavisne uzorke procijenjena je promjena unutar svake grupe. U eksperimentalnoj grupi sedmog razreda uočen je statistički značajan napredak ( $t = 3,13$ ;  $p = 0,006$ ), što potvrđuje pozitivan uticaj modela. U kontrolnoj grupi sedmog razreda promjena nije statistički značajna ( $t = -0,82$ ;  $p = 0,422$ ). U eksperimentalnoj grupi osmog razreda zabilježen je statistički značajan pad rezultata ( $t = -4,68$ ;  $p < 0,001$ ), a sličan pad utvrđen je i u kontrolnoj grupi osmog razreda ( $t = -3,69$ ;  $p = 0,002$ ).

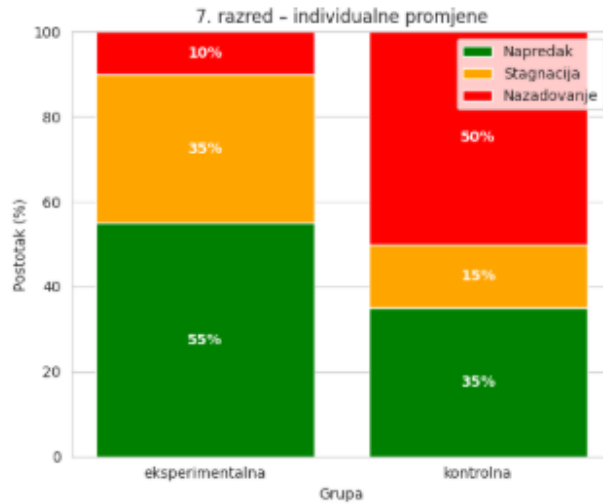
### **Analiza individualnih promjena**

Prosječne vrijednosti ne otkrivaju u potpunosti heterogenost efekata, stoga je urađena analiza individualnih promjena prema kategorijama napredak, stagnacija i nazadovanje, kako je najavljeno u metodologiji.

**Tabela 4** i **Slika 2** prikazuju distribuciju učenika u 7. razredu. Većina učenika u eksperimentalnoj grupi bilježi napredak, dok je u kontrolnoj grupi zastupljeniji pad. Ovi nalazi potvrđuju heterogenost efekata modela i pokazuju da on ne djeluje jednako na sve učenike.

**Tabela 4: Distribucija učenika prema individualnom napretku (7. razred)**

<b>Kategorija</b>	<b>Eksperimentalna 7. r</b>	<b>Kontrolna 7. r</b>
<b>Napredak (&gt; +5%)</b>	11 (55,0%)	7 (35,0%)
<b>Stagnacija (±5%)</b>	7 (35,0%)	3 (15,0%)
<b>Nazadovanje (&lt; -5%)</b>	2 (10,0%)	10 (50,0%)
<b>Ukupno</b>	<b>20 (100%)</b>	<b>20 (100%)</b>

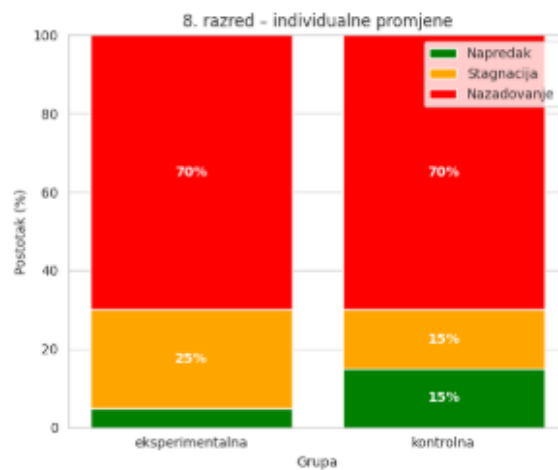


**Slika 2: Vizuelni prikaz individualnih promjena po grupama (7. razred)**

U 8. razredu, Tabela 5 i Slika 3 prikazuju distribuciju individualnih promjena. U obje grupe dominira pad postignuća, dok je udio učenika koji napreduju marginalan. Ovakav obrazac u skladu je s nalazom ANCOVA-e da ne postoji statistički značajna razlika između grupa – tretman nije uspio proizvesti povoljniji ishod ni u jednoj grupi, a opći pad rezultata prisutan je podjednako.

**Tabela 5: Distribucija učenika prema individualnom napretku (8. razred)**

Kategorija	Eksperimentalna 8.r	Kontrolna 8.r
<b>Napredak (&gt; +5%)</b>	<b>1 (5,0%)</b>	<b>3 (15,0%)</b>
<b>Stagnacija (±5%)</b>	<b>5 (25,0%)</b>	<b>3 (15,0%)</b>
<b>Nazadovanje (&lt; -5%)</b>	<b>14 (70,0%)</b>	<b>14 (70,0%)</b>
<b>Ukupno</b>	<b>20 (100%)</b>	<b>20 (100%)</b>



**Slika 3: Vizuelni prikaz individualnih promjena po grupama (8. razred)**  
**Kategorijska analiza uspjeha**

U eksperimentalnoj grupi 7. razreda, 3 od 12 učenika (25%) koji su na predtestu bili u kategorijama nedovoljan ili dovoljan (ocjene 1 i 2) prešlo je na završnom testiranju u kategorije dobar, vrlo dobar ili odličan (ocjene 3–5). U kontrolnoj grupi 7. razreda nije zabilježen nijedan takav pomak. U 8. razredu nije bilo prelaska iz nižih u više kategorije ni u jednoj grupi.

**Kvalitativna analiza grešaka i interakcija među učenicima**

Analiza učeničkih grešaka pruža uvid u kvalitativne razlike između grupa. Na predtestu su dominirale greške tipa mehaničkog računanja bez razumijevanja, pogrešnog tumačenja pravila i preskakanja koraka. Na posttestu su učenici iz eksperimentalne grupe rjeđe pravili takve greške, a češće su pokazivali potpuniji tok rješavanja i spremnost da verbalizuju postupak.

**Tabela 6: Sažetak najčešćih grešaka i promjena u kvalitetu rješavanja zadataka**

Tip zadatka	Najčešće greške na predtestu	Promjene u eksperimentalnoj grupi na posttestu
<b>Operacije u Z</b>	Pogrešan predznak, računanje apsolutnih vrijednosti bez pravila	Manje grešaka u predznaku, češće potpun zapis postupka
<b>Linearne jednačine</b>	Preskakanje koraka, pogrešno prebacivanje članova	Veća tačnost u redosljedu rješavanja i provjeri rješenja
<b>Tekstualni zadaci</b>	Nejasno izdvajanje podataka i izbor strategije	Bolje tumačenje uslova zadatka i jasnije obrazloženje
<b>Geometrijski zadaci</b>	Nepotpune skice i pogrešna primjena formula	Češće korištenje skice i povezivanje formule sa situacijom

Posmatranje nastavnog procesa pokazalo je i promjene u međusobnim interakcijama učenika. U eksperimentalnim grupama primijećeno je češće dobrovoljno pomaganje – učenici koji su brže rješavali zadatke prilazili su drugovima i objašnjavali im postupak. Ova pojava, koju bismo mogli okarakterisati kao vršnjačko podučavanje i empatiju, nije zabilježena u kontrolnim grupama.

**Tabela 7: Pregled ključnih nalaza istraživanja**

Aspekt	Eksperimentalna grupa	Kontrolna grupa
<b>Promjena prosjeka (7. r.)</b>	+5,65 bodova (napredak)	-1,70 bodova (pad)
<b>Promjena prosjeka (8. r.)</b>	-8,10 bodova (veći pad)	-5,15 bodova (manji pad)
<b>ANCOVA efekat grupe</b>	Značajan u 7. r., nije u 8. r.	—
<b>Individualni napredak</b>	<b>55%</b> (7. r.)	<b>35%</b> (7. r.)
<b>Individualno nazadovanje</b>	<b>10%</b> (7. r.)	<b>50%</b> (7. r.)

### **Veličine efekata**

Kako bi se dodatno interpretirao učinak modela izvrnute učionice, izračunate su veličine efekata (Cohenov **d**). Za poređenje između grupa na posttestu korišten je **d** za nezavisne uzorke, dok je za procjenu promjene unutar grupa korišten **d** za zavisne uzorke – izračunat kao omjer srednje razlike između posttesta i predtesta i standardne devijacije tih razlika.

U sedmom razredu razlika između eksperimentalne i kontrolne grupe na posttestu je mala (**d** = 0,16). Unutar eksperimentalne grupe zabilježen je umjeren napredak (**d** = 0,70), što potvrđuje da su učenici u prosjeku napredovali nakon primjene modela.

U osmom razredu efekat između grupa na posttestu je također mali (**d** = 0,18). Međutim, unutar grupa došlo je do pada prosječnih rezultata: u eksperimentalnoj grupi veličina efekta je negativna i velika (**d** = -1,05), a u kontrolnoj grupi također negativna, umjerena (**d** = -0,83). Ovi nalazi odražavaju heterogenost u reagovanju učenika i izostanak očekivanog napretka u starijem uzrastu. Dobijene vrijednosti u skladu su s rezultatima ANCOVA-e i analize individualnih promjena: model izvrnute učionice pokazao je pozitivan učinak u sedmom razredu, dok u osmom razredu nije doveo do boljih postignuća u odnosu na tradicionalnu nastavu, a zabilježen je i opći pad znanja kod obje grupe.

### **Diskusija**

Nalazi istraživanja upućuju na potrebu za nijansiranom interpretacijom. S jedne strane, deskriptivni rezultati i kvalitativna analiza pokazuju da izvrnuta učionica ima pedagošku vrijednost – učenici iz eksperimentalne grupe sedmog razreda ostvarili su umjeren napredak (Cohenov **d** = 0,70) i veći angažman, što potvrđuje da većina učenika napreduje, iako ne ujednačeno. S druge strane, ANCOVA nije potvrdila statistički značajnu prednost modela na nivou cijelog uzorka, što je u skladu s međunarodnim istraživanjima [3, 5, 11] koja ukazuju na umjerene efekte koji zavise od konteksta.

U odnosu na postavljene hipoteze, H1 je djelimično potvrđena – model je pokazao značajan efekat u 7. razredu ( $p < 0,001$ ), ali ne i u 8. razredu ( $p = 0,23$ ). H2 je potvrđena kvalitativnim nalazima:

učenici u eksperimentalnim grupama pokazali su veći angažman, potpuniji zapis postupka i razvijeniju saradnju.

Predtest se pokazao kao snažan prediktor posttesta u svim modelima, potvrđujući da predznanje ima presudnu ulogu. Za učenike s nižim predznanjem model može biti koristan, ali samo uz dodatnu podršku nastavnika u fazi individualne pripreme. Aktivnije uključivanje učenika u eksperimentalnim grupama može dugoročno utjecati na razvoj samopouzdanja i smanjenje matematičke anksioznosti [4].

Jedan od važnih uvida jeste potencijal modela da podstakne socijalnu koheziju i empatiju. U eksperimentalnim grupama primijećeno je vršnjačko podučavanje – učenici su jedni drugima objašnjavali nejasnoće i zajedno tragali za rješenjima, što nije zabilježeno u kontrolnim grupama. Iako nije sistematski mjereno, ovo otvara prostor za buduća istraživanja socio-emocionalnih aspekata modela.

Razlike između 7. i 8. razreda mogu se objasniti težinom gradiva, razvojnim karakteristikama i motivacijom. Sadržaji u osmom razredu (linearne jednačine, sistemi, geometrija) apstraktniji su i zahtjevniji za samostalno savladavanje. Uz to, posttest za 8. razred bio je znatno složeniji od predtesta – sadržavao je zadatke koji zahtijevaju povezivanje više formula (jednakostranični trougao, Pitagorin poučak u prostornim kontekstima, odnos težišta i visine), dok je predtest provjeravao uglavnom osnovne operacije i definicije. Ova disproporcija u težini vjerovatno je značajno doprinijela općem padu rezultata u obje grupe. Takođe, učenici osmog razreda ulaze u period adolescencije što može uticati na koncentraciju i navike učenja. Ove faktore dodatno oslikavaju i veličine efekata unutar grupa: u 8. razredu eksperimentalna grupa bilježi veliki pad ( $d = -1,05$ ), a kontrolna umjereni pad ( $d = -0,83$ ), dok je u 7. razredu eksperimentalna grupa ostvarila napredak ( $d = 0,70$ ), a kontrolna stagnaciju ( $d = -0,18$ ).

Ograničenja modela uključuju digitalnu dostupnost, opterećenje nastavnika i socio-ekonomski kontekst. Kvalitativno istraživanje Plešec Gasparič i saradnika [9] potvrđuje da su upravo pristup tehnologiji i odgovornost učenika ključni izazovi – učenici čiji roditelji mogu osigurati stabilno okruženje za rad i pružiti podršku u znatno su povoljnijoj poziciji. Iako naše istraživanje nije sistematski mjerilo socio-ekonomski status, nalazi [9] jasno ukazuju na ovu dimenziju nejednakosti. Pitanje spolne strukture takođe može biti relevantno – dok Stajić i saradnici [12] u nastavi geografije bilježe nešto bolje rezultate kod dječaka (iako bez statističke značajnosti), Orlić i saradnici [7] u nastavi matematike ne nalaze razlike među spolovima. Ovi nalazi sugerišu potrebu

za sistematskim praćenjem navedenih varijabli u budućim istraživanjima. Podatak da je u kontrolnoj grupi 7. razreda 50% učenika nazadovalo, dok je u eksperimentalnoj grupi taj udio iznosio svega 10%, ukazuje da je model izvrnute učionice možda uspio ublažiti negativne uticaje nedostatka kućne podrške. Budući da se na času više vremena posvećivalo razrješavanju nedoumica i individualiziranoj pomoći, učenici su imali priliku nadoknaditi eventualne propuste u samostalnom radu kod kuće. Ipak, za potpuniju procjenu uticaja socio-ekonomskog konteksta potrebna su sistematska mjerenja u budućim istraživanjima. Rezultati su uporedivi sa istraživanjima u regionu. Orlić i saradnici [7] potvrdili su efikasnost modela u mlađim razredima, dok Plešec Gasparič i saradnici [10] pokazuju da model doprinosi boljem zadržavanju znanja, iako neposredni efekti nisu uvijek statistički značajni. Stajić i saradnici [12] bilježe sličan obrazac u nastavi geografije. Kvalitativni uvidi [9] ukazuju na iste izazove – digitalnu dostupnost i odgovornost učenika.

### **Pedagoške implikacije i preporuke**

Na osnovu teorijske analize i empirijskih nalaza mogu se izdvojiti sljedeće preporuke za nastavnike i škole:

1. **Postepeno uvođenje modela** – započeti s pojedinačnim temama, a tek potom širiti na veći broj sadržaja.
2. **Kvalitetan dizajn materijala** – videolekcije do 15 minuta, jezički jasne, s pitanjima za samoprovjeru.
3. **Aktivna organizacija rada na času** – diferencirani zadaci, analiza grešaka, rad u paru, povratna informacija.
4. **Praćenje učenika u pripremnoj fazi** – kratki kvizovi, ulazna pitanja, obrasci samoprocjene.
5. **Institucionalna podrška** – vrijeme za pripremu, tehnička oprema, stručno usavršavanje.
6. **Osjetljivost na individualne razlike** – dodatna struktura i podrška učenicima s nižim predznanjem.
7. **Praćenje individualnih trendova** – rano prepoznavanje učenika koji nazaduju.

Za buduća istraživanja preporučuje se produženje trajanja intervencije, uključivanje mjerenja socio-ekonomskog statusa i sistematsko ispitivanje socio-emocionalnih aspekata. Posebno bi bilo korisno longitudinalno pratiti efekte modela, s obzirom na uočene razlike među uzrastima.

## ZAKLJUČAK

Izvrnuta učionica predstavlja teorijski utemeljen pokušaj modernizacije nastave matematike. Njena vrijednost leži u promjeni funkcije učioničkog vremena – umjesto frontalnog izlaganja, nastava se usmjerava na razumijevanje, primjenu i analizu grešaka.

Empirijski nalazi potvrđuju koristi modela u 7. razredu: eksperimentalna grupa ostvarila je statistički značajno bolje rezultate od kontrolne (ANCOVA:  $F = 51,70$ ,  $p < 0,001$ ) uz umjerenu veličinu efekta unutar grupe ( $d = 0,70$ ). Analiza individualnih promjena pokazala je da je u eksperimentalnoj grupi 7. razreda 55 % učenika napredovalo, a samo 10 % nazadovalo, dok je u kontrolnoj grupi 50 % učenika nazadovalo. U 8. razredu nije utvrđena statistički značajna razlika između grupa ( $p = 0,23$ ), a unutar grupa zabilježen je pad – veliki u eksperimentalnoj ( $d = -1,05$ ) i umjereni u kontrolnoj ( $d = -0,83$ ). Ovi nalazi ukazuju da efekat modela zavisi od uzrasta i konteksta.

Kvalitativna analiza upotpunjuje kvantitativne rezultate: u eksperimentalnim grupama uočeni su potpuniji zapisi rješavanja, manje mehaničkih grešaka i razvijenija saradnja među učenicima (vršnjačko podučavanje). Istovremeno, heterogenost individualnih promjena unutar eksperimentalne grupe 7. razreda (55 % napredak, 35 % stagnacija, 10 % nazadovanje) potvrđuje da model ne djeluje jednako na sve učenike i zahtijeva diferenciran pristup.

Uspjeh modela ne mjeri se samo testovima, već i promjenom u načinu na koji učenici doživljavaju matematiku – kao prostor za istraživanje i argumentaciju. Ograničenja studije (mali uzorak, kratko trajanje, nepostojanje SES podataka) treba uzeti u obzir pri generalizaciji, ali one ne umanjuju vrijednost uočenih pedagoških potencijala.

## CONCLUSION

The flipped classroom represents a theoretically grounded attempt to modernize mathematics teaching. Its value lies in the transformation of classroom time – moving from frontal instruction toward understanding, application, and error analysis.

Empirical findings confirm the benefits of the model in the 7th grade: the experimental group achieved significantly better results than the control group (ANCOVA:  $F = 51.70$ ,  $p < 0.001$ ) with a moderate within-group effect size ( $d = 0.70$ ). Individual change analysis showed that in the 7th-grade experimental group, 55% of students improved while only 10% regressed, whereas in the

control group 50% of students regressed. In the 8th grade, no statistically significant difference was found between groups ( $p = 0.23$ ), and both groups showed a decline – large in the experimental group ( $d = -1.05$ ) and moderate in the control group ( $d = -0.83$ ). These findings indicate that the model's effectiveness depends on grade level and context.

Qualitative analysis complements the quantitative results: experimental groups exhibited more complete solution records, fewer mechanical errors, and more developed collaboration among students (peer tutoring). At the same time, the heterogeneity of individual changes within the 7th-grade experimental group (55% improvement, 35% stagnation, 10% regression) confirms that the model does not affect all students equally and requires a differentiated approach.

The success of the model is measured not only by test scores, but also by the shift in how students experience mathematics – as a space for inquiry and argumentation. The study's limitations (small sample, short duration, lack of SES data) should be considered when generalizing, but they do not diminish the value of the observed pedagogical potential.

## LITERATURA

- [1] Bergmann, J., & Sams, A. *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day*. International Society for Technology in Education, 2012.
- [2] Bikić, N., Burgić, D., & Huskanović, A. Matematička pismenost i primjeri PISA testova. \*10th Research/Expert Conference with International Participation Quality\*, 2017.
- [3] Bishop, J. L., & Verleger, M. A. The flipped classroom: A survey of the research. *Proceedings of the 120th ASEE Annual Conference & Exposition*, Atlanta, 2013.
- [4] Boaler, J. *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. Jossey-Bass, 2016.
- [5] Lo, C. K., & Hew, K. F. The impact of flipped classrooms on student achievement in engineering education: A meta-analysis of 10 years of research. *Journal of Engineering Education*, 108(4), 523–546, 2019.
- [6] OECD. *Reviews of Evaluation and Assessment in Education: Bosnia and Herzegovina*. OECD Publishing, Paris, 2021.
- [7] Orlić, S., Marić, M., & Petojević, A. Implementing the flipped classroom model in mathematics class teaching. *South African Journal of Education*, 43(Suppl. 2), S1–S12, 2023.
- [8] Piaget, J. *The Psychology of the Child*. New York: Basic Books, 1972.

- [9] Plešec Gasparič, R., Pejić Papak, P., & Valenčič Zuljan, M. Teachers' perceptions of flipped learning and teaching: Planning, implementation and evaluation. In T. Devjak, L. Vujičić, & P. Pejić Papak (Eds.), *MODERN CHALLENGES IN EDUCATION* (pp. 185–216). Rijeka: Centre for Childhood Research, Faculty of Teacher Education, University of Rijeka and Faculty of Education, University of Ljubljana, 2023.
- [10] Plešec Gasparič, R., Glavan, M., Žveglič Mihelič, M., & Valenčič Zuljan, M. Effectiveness of Flipped Learning and Teaching: Knowledge Retention and Students' Perceptions. *Journal of Information Technology Education: Research*, 23, 2024. <https://doi.org/10.28945/5237>
- [11] Pujiriyanto, C. D. Handaru and J. Hukom, Meta-Analysis of The Effectiveness of The Flipped Classroom Model On Students' HOTS in Mathematics, *JTP - Jurnal Teknologi Pendidikan*, vol. 25, no. 3, pp. 569–583, 2024.
- [12] Stajić, S., Đukičin Vučković, S., Ivanović Bibić, L., Milanković, J., Ivkov Džigurski, A., Dragović, R., Dragin, A., Solarević, M., & Lukić, A. How the Flipped Classroom Affects Year Seven Students in Geography Test Results: A Case Study of Two Primary Schools in Serbia. *Sustainability*, 17(6), 2464, 2025. <https://doi.org/10.3390/su17062464>
- [13] Sweller, J. Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, 12(2), 257–285, 1988.
- [14] Vygotsky, L. S. *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1978.
- [15] Zainuddin, Z., & Halili, S. H. Flipped classroom research and trends from different fields of study. *International Review of Research in Open and Distributed Learning*, 17(3), 313–340, 2016.
- [16] Zimmerman, B. J. Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory Into Practice*, 41(2), 64–70, 2002.

## THE EFFECT OF THE FLIPPED CLASSROOM MODEL ON STUDENT ACHIEVEMENT IN MATHEMATICS

### *Abstract*

*This paper examines the possibilities and limitations of implementing the flipped classroom model in primary school mathematics, with a particular focus on student achievement, engagement, and quality of problem solving. The research was conducted on a sample of 80 seventh and eighth grade students, using a quasi-experimental pre-test/post-test design. The theoretical section discusses constructivism, self-regulated learning, task complexity, mathematical literacy, and PISA findings as key arguments for the modernization of mathematics teaching. The results show that the flipped classroom can contribute to better student engagement and quality of problem solving, but its effects depend on grade level. In the seventh grade, the experimental group achieved significantly better results than the control group ( $p < 0.001$ ), whereas in the eighth grade no significant difference was found between groups. Analysis of individual changes reveals heterogeneity of effects – some students progress, some stagnate, and some regress, indicating the need for additional monitoring and support.*

**Keywords:** *flipped classroom, mathematics education, primary school, mathematical literacy, self-regulated learning, cognitive load, student achievement*