

Dževad Burgić

Lea Kokorović

NUMERIČKO RJEŠAVANJE JEDNODIMENZIONALNE TALASNE JEDNAČINE METODOM KONAČNIH RAZLIKA KORIŠTENJEM SOFTVERA MATHEMATICA

Sažetak

Parcijalne diferencijalne jednačine (PDJ) imaju važnu ulogu u modeliranju brojnih prirodnih pojava i tehničkih procesa. Ove jednačine najčešće opisuju kako se fizikalne veličine poput temperature, pritiska, gustoće i elektromagnetskog polja mijenjaju u prostoru i vremenu. Analitičko rješavanje PDJ nije uvijek moguće što zahtijeva upotrebu raznih numeričkih metoda koje omogućavaju određivanje tzv. približnih rješenja.

U radu se postavljaju hipoteze o efikasnosti metode konačnih razlika u okviru programskog softvera Mathematica. To uključuje numeričku analizu s analitičkim rješenjima, studiju konvergencije i evaluaciju računске složenosti. Poseban naglasak je stavljen na očekivane doprinose u smislu optimizacije parametara metode i razvoja praktičnih smjernica za rješavanje PDJ-a u realnim primjenama. Također, u ovom radu je predstavljen softver Mathematica kao moćan alat za matematičko modeliranje i analizu, te su predstavljene osnovne upute kako koristiti Mathematicu za osnovne izračune, grafičko prikazivanje rezultata te programiranje.

Glavni dio ovog rada čini implementacija metode konačnih razlika u Mathematici. Detaljno se analiziraju sheme konačnih razlika za svaki tip PDJ-a, uključujući eksplicitne i implicitne aproksimacije. Ispituje se utjecaj parametara mreže na stabilnost i tačnost rješenja.

Završni dio ovog rada naglašava prednosti softvera Mathematica u povećanju produktivnosti istraživača kroz integraciju računskih, simboličkih i vizualizacijskih komponenti. Razmatraju se ograničenja metode i softverskog okruženja, ukazujući da kombinacija s drugim numeričkim metodama može rezultirati tačnijim i bržim rješenjima.

Ključni pojmovi: *linearne parcijalne diferencijalne jednačine, metoda konačnih razlika, jednodimenzionalna talasna jednačina, softver Mathematica.*

UVOD

Parcijalne diferencijalne jednačine (PDJ) imaju značajnu ulogu u matematičkom opisivanju prirodnih pojava i procesa poput difuzije, oscilacija, valova, pa čak i predviđanja meteoroloških uvjeta ili analize strukturalnih inženjerskih problema. PDJ opisuju kako se neka fizikalna veličina poput temperature, pritiska, gustoće ili elektromagnetskog polja mijenja u prostoru i vremenu, čineći ih ključnim alatom u modeliranju dinamičkih sistema.

Njihova rješenja omogućavaju predviđanje ponašanja sistema, ali su analitička rješenja često nedostupna ili računski zahtjevna zbog složenih početnih i graničnih uslova. Zato se razvijaju numeričke metode s obzirom na stabilnost, brzinu konvergencije i računsku složenost.

Računarski softver Mathematica omogućava brzu implementaciju numeričkih metoda, nudi ugrađene funkcije za analitičko (“DSolve”) i numeričko (“NDSolve”) rješavanje PDJ-a, te omogućava usporedbu s egzaktnim rješenjima za validaciju modela.

Uz napredne tehnike vizualizacije (3D grafovi, animacije), Mathematica postaje sve nezamjenjiviji alat u rješavanju kompleksnih problema koji bi prije bili nedostižni.

Cilj istraživanja

Cilj ovog rada je istražiti primjenu softvera Mathematica u numeričkom rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina (PDJ-a), s posebnim osvrtom na metodu konačnih razlika. Odnosno, u radu će se ispitati praktična primjena metode konačnih razlika na jednodimenzionalnoj talasnoj jednačini koristeći softver Mathematica kao alat za simulaciju i vizualizaciju dobivenih rezultata. Numerički rezultati će biti uspoređeni s analitičkim rješenjima (gdje je to moguće) kako bi se procijenila greška aproksimacije i konvergencija metode. Analizirat će se utjecaj veličine mreže, vremenskog koraka i graničnih uvjeta na stabilnost numeričkog rješenja, s posebnim osvrtom na numeričke uvjete stabilnosti poput CFL kriterija. Kroz konkretne primjere, pokazat će se prednosti i ograničenja primijenjene numeričke metode.

Konačno, rad će dati kritičku evaluaciju efikasnosti metode konačnih razlika te formulirati praktične preporuke za njezinu optimalnu primjenu u realnim problemima.

Kratak uvod u softver Mathematica

Mathematica je programski paket za simboličko i numeričko rješavanje matematičkih, inženjerskih i naučnih problema - od elementarne algebre do naprednih numeričkih simulacija.

Arhitektura Mathematice se sastoji od dvije ključne komponente: Kernel-a (jezgro, “računski motor” sistema) i Notebook sučelja (interaktivno okruženje s ćelijama za tekst, programski kod, formule i grafiku).

U ovom radu, fokus je na primjeni softvera Mathematica u numeričkom rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina metodom konačnih razlika. S obzirom da analitička rješenja često nisu dostupna za realne probleme, Mathematica nudi fleksibilno programsko okruženje sa moćnim grafičkim alatima za modeliranje, analizu i vizualizaciju rješenja.

Teorijske osnove linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina

Parcijalne diferencijalne jednačine (PDJ) opisuju odnos između nepoznate funkcije u i njezinih parcijalnih izvoda (derivacija). Osim u matematici, značajnu ulogu pronalaze i u fizici jer modeliraju različite prirodne pojave, a sve veću primjenu imaju i u biologiji, hemiji, računalnim znanostima te ekonomiji.

Parcijalne derivacije funkcije $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gdje su x_1, x_2, \dots, x_n nezavisne varijable, označavamo sa:

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1)$$

Za funkciju u smatramo da je klase C^k na Ω ako ima neprekidne parcijalne izvode reda k na Ω .

Definicija 1. *Parcijalna diferencijalna jednačina je jednačina oblika:*

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad (2)$$

gdje je $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nepoznata funkcija po nezavisnim varijablama: x_1, x_2, \dots, x_n .

Red parcijalne diferencijalne jednačine označava red najviše derivacije koja se pojavljuje u jednačini, a analizira se na otvorenom povezanom skupu $\Omega \subseteq R^n$. Rješenje parcijalne diferencijalne jednačine (3.2) reda k na skupu $\Omega \subseteq R^n$ je funkcija $u \in C^k(\Omega)$ koja zadovoljava jednačinu (3.2) u svakoj tački skupa Ω , a nazivamo ih klasičnim ili jakim rješenjima.

Parcijalne diferencijalne jednačine možemo klasificirati prema sljedećim svojstvima:

1. Red jednačine - označava red najviše derivacije – što je veći, teže je riješiti.
2. Linearne i nelinearne jednačine
 - a) Linearna jednačina – ako je F linearna funkcija u varijablama u i svim njezinim parcijalnim derivacijama, a koeficijenti ovise samo o nezavisnim varijablama x_1, \dots, x_n .
 - b) Nelinearna jednačina – ako nije linearna.

- c) Kvazilinearna jednačina – ako je F linearna u svim parcijalnim derivacijama najvišeg reda od u .

PDJ drugog reda sa dvije nezavisne varijable se mogu klasificirati na tri tipa:

- hiperboličke jednačine
- paraboličke jednačine
- eliptičke jednačine.

Opća linearna jednačina drugog reda sa dvije nezavisne varijable ima oblik

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (3)$$

gdje su: u, A, B, C, D, E, F, G funkcije varijabli x, y u zadanom području $\Omega \subseteq R^2$ i pretpostavljamo da je $u \in C^2(\Omega)$.

Jednačinu (3.3) možemo zapisati u operatorskom obliku $L[u] = G$ gdje je

$$L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F \quad (4)$$

Operatoru L je pridružena mu je diskriminanta

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) \quad (5)$$

Zbog navedenog vrijedi da je jednačina (3.3):

- a) hiperbolička u tački (x, y) ako je $\Delta(x, y) > 0$
- b) parabolička u tački (x, y) ako je $\Delta(x, y) = 0$
- c) eliptička u tački (x, y) ako je $\Delta(x, y) < 0$.

Metoda konačnih razlika za rješavanje hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednačina

Jednodimenzionalna talasna jednačina

Metoda konačnih razlika funkcionira tako da zamjenjuje područje u kojem su nezavisne varijable definisane konačnom mrežom tačaka u kojima se aproksimira zavisna varijabla. Parcijalne derivacije u svakoj tački mreže aproksimiraju se iz susjednih vrijednosti korištenjem Taylorovog teorema. Dakle, metoda konačnih razlika pojednostavljuje rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina tako što kontinuirani problem pretvara u diskretni problem, gdje se derivacije zamjenjuju razlikama između vrijednosti funkcije na unaprijed definisanim tačkama.

Teorem 1. (Taylorov teorem) Neka $U(x)$ ima n neprekidnih derivacija u intervalu (a, b) . Onda za $a < x_0, x_0 + h < b$, vrijedi

$$U(x_0 + h) = U(x_0) + hU_x(x_0) + h^2 \frac{U_{xx}(x_0)}{2!} + \dots + h^{n-1} \frac{U_{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + O(h^n), \quad (6)$$

gdje je:

- $U_x = \frac{dU}{dx}, U_{xx} = \frac{d^2U}{dx^2}, \dots, U_{(n-1)} = \frac{d^{n-1}U}{dx^{n-1}}$
- $U_x(x_0)$ je derivacija od U u odnosu na x procijenjena na $x = x_0$
- $O(h)$ je nepoznati red pogreške.

Linearna hiperbolička parcijalna diferencijalna jednačina (PDJ) oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (7)$$

predstavlja jednodimenzionalnu talasnu jednačinu koja modelira kretanje veličine u , gdje je x prostorna koordinata tijekom vremena t uz konstantu a . Da bi rješenje (7) bilo jedinstveno, potrebno je zadati početni uslov u nekom vremenu $t = t_0 \geq 0$. Ako je vrijeme $t = 0$, funkcija $u(x, t)$ ima oblik:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (8)$$

čime se dobija Cauchyjev problem. Za numeričko rješavanje problema početnih vrijednosti koristi se metoda konačnih razlika primjenom proširenja Taylorovog reda.

Taylorove formule za funkciju $u(x)$ su:

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(\varepsilon_1) \\ u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(\varepsilon_2) \\ u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(\varepsilon_3) \end{aligned} \quad (9)$$

gdje $\varepsilon_1 \in [x, x+h], \varepsilon_2 \in [x-h, x], \varepsilon_3 \in [x, x+h]$.

Navedene formule omogućavaju aproksimaciju derivacija gdje dobivamo izraze poznatije kao podijeljene razlike.

„Razlika unaprijed“ predstavlja podijeljenu razliku oblika:

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Njezina implementacija u Mathematici uvođenjem funkcije discretize glasi:

`discretize [Derivative[1]][u_,h_,schemetype ->forward]:=((u[#+h]-u[h])/h)&`

„Razlika unatrag“ predstavlja podijeljenu razliku oblika:

$$\frac{u(x) - u(x - h)}{h}$$

Implementaciju „razlike unatrag“ možemo predstaviti u Mathematici pomoću funkcije `discretize`:

`discretize [Derivative[1]][u_,h_,schemetype ->backward]:=((u[#]-u[#-h])/h)&`

Konačno, podijeljena razlika po imenu „središnja razlika“ definisana je kao

$$\frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h}$$

Implementaciju „središnje razlike“ također možemo predstaviti u softveru Mathematica:

`discretize [Derivative[1]][u_,h_,schemetype ->central]:=((u[#+h]-u[#-h])/(2h))&`

Pravilo *scheme type* se koristi za specifikaciju vrste podijeljene razlike.

U nastavku je prikazan postupak dobivanja razlike unatrag i središnje razlike u softveru Mathematica, analogno:

```
In[4]:= ux1 = discretize[u', h, schemetype -> backward][x]
```

```
Out[4]= 
$$\frac{u[x] - u[-h+x]}{h}$$

```

Slika 1. Postupak dobivanja razlike unatrag koristeći pravilo scheme type

```
In[5]:= ux2 = discretize[u', h, schemetype -> central][x]
```

```
Out[5]= 
$$\frac{-u[-h+x] + u[h+x]}{2h}$$

```

Slika 2. Postupak dobivanja razlike unatrag koristeći pravilo scheme type

Analitičko rješenje parcijalne diferencijalne jednačine definisano je u kontinuiranom području varijabli u i t , dok se aproksimativno rješenje određuje samo u nekim diskretnim tačkama (u, t) ravnine (Ganzha i Vorozhtsov, 1995). Ako se rješenje PDJ traži na segmentu $[a_1, b_1]$, tada je i broj tačaka u tom segmentu konačan.

Konačan skup tačaka na segmentu $[a_1, b_1]$ koji zadovoljava uvjet

$$a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = b_1 \quad (10)$$

naziva se prostorna mreža pri čemu je x prostorna varijabla, a tačke x_i predstavljaju čvorove mreže.

Ako numeričko rješenje jednačine (8) treba odrediti u konačnom vremenskom intervalu $0 \leq t \leq T$, tada se definiše mreža na t – osi kao:

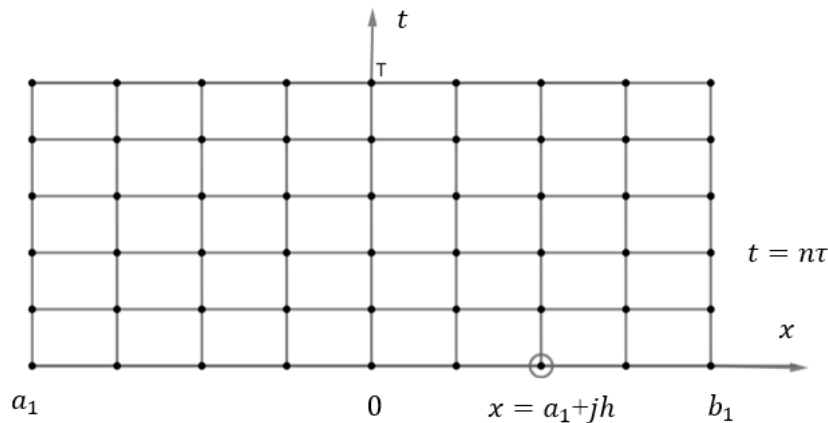
$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T \quad (11)$$

Mreže (4.1.5) i (4.1.6) nazivaju se uniformne mreže ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$x_j = a_1 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, M; \quad t_n = n\tau, \quad n = 0, \dots, N \quad (12)$$

gdje je $h = \frac{(b_1 - a_1)}{M}$ korak prostorne mreže, a $\tau = \frac{T}{N}$ vremenski korak.

Uvedimo uniformnu mrežu G_h u (x, t) ravni kao konačni skup tačaka na presjeku pravih linija (Slika 3). Funkcija $u = u(x, t)$ koja je određena u čvorovima mreže G_h naziva se mrežna funkcija.



Slika 3. Uniformna mreža G_h u ravni (x, t)

Prikaz rješavanja jednodimenzionalne talasne jednačine može se predstaviti korištenjem softvera Mathematica. Prvenstveno je potrebno definisati parametre i početni uslov, a za numeričko rješenje koristimo metodu konačnih razlika, gdje se prostor i vrijeme diskretiziraju na mreži, a vrijednosti funkcije u vremenu se računaju iterativno (primjer 1). Na kraju ćemo usporediti numerički rezultat s analitičkim rješenjem, provesti analizu stabilnosti te konvergencije koji zavise od izbora mreže i veličine koraka.

Primjer 1. Primjena metode konačnih razlika za rješavanje jednodimenzionalne talasne jednačine

For[j = 2, j <= Nt, j++,

uNext = Table[

If[i == 1 || i == Nx + 1, uCurr[[i]],

2 uCurr[[i]] - uPrev[[i]] + (c^2 dt^2 / dx^2) (uCurr[[i + 1]] - 2 uCurr[[i]] + uCurr[[i - 1]]),

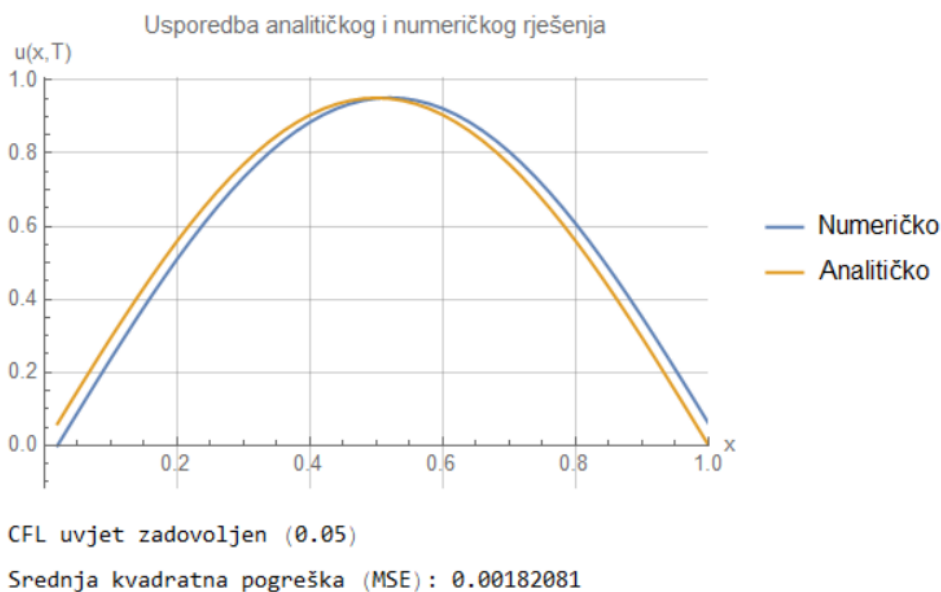
{i, 1, Nx + 1}

];

uPrev = uCurr;

uCurr = uNext;

];



Slika 4. Prikaz rezultata pri rješavanju jednodimenzionalne talasne jednačine

Numeričko rješenje talasne jednačine dobiveno metodom konačnih razlika pokazuje dobro slaganje s analitičkim rješenjem. Srednja kvadratna pogreška od 0.00182081 je mala, što znači da numerička aproksimacija prati tačno rješenje. CFL uvjet je zadovoljen što potvrđuje da je numerička shema stabilna.

Dakle, za pouzdanost rješenja je potrebno da je metoda stabilna i da rješenje konvergira prema tačnom rješenju s prihvatljivom preciznošću za zadani broj vremenskih i prostornih koraka. Za još veću tačnost, MSE se može dodatno smanjiti povećanjem broja podjela u prostoru N_x i vremenu N_t , odnosno smanjenjem veličine prostornog koraka dx i veličine vremenskog koraka dt .

Metoda neodređenih koeficijenata

Metoda neodređenih koeficijenata je jedna od metoda koja se koristi za derivaciju podijeljenih razlika veće tačnosti ili za aproksimaciju derivacija višeg reda.

Za dobijanje podijeljene razlike koja aproksimira drugu derivaciju $u''(x)$ u tački $x = x_j$ i uključuje samo vrijednosti u_{j-1} , u_j i u_{j+1} može se primijeniti softver Mathematica primjenom formule (4.1.4) i odabirom aproksimacije oblika:

$$u_{xx}(x_j) = au_{j+1} + bu_j + cu_{j-1}$$

Kako je $u_{j+1} = u(x_{j+1}) = u(a_1 + (j+1)h) = u(a_1 + jh + h) = u(x_j + h) = u(x + h)$,

izraz se može napisati u obliku:

$$u_{xx}(x_j) = au(x+h) + bu(x) + cu(x-h)$$

U Mathematici to izgleda kao:

```
In[1]:= uxx = a * u[x+h] + b * u[x] + c * u[x-h]
```

```
Out[1]= bu[x] + cu[-h+x] + au[h+x]
```

```
In[2]:= s = Normal[Series[uxx, {h, 0, 2}]]
```

```
Out[2]= au[x] + bu[x] + cu[x] + h (au'[x] - cu'[x]) +  $\frac{1}{2}$  h2 (au''[x] + cu''[x])
```

Slika 5. Dobivanje podijeljene razlike koja aproksimira drugu derivaciju

Funkcija *Normal* [*expr*] uklanja član $O(h^k)$ i svodi izraz na standardni oblik. Iz Taylorovog proširenja izraza u_{xx} uočavamo da je s polinom od h . Kako želimo da vrijedi $s = u_{xx}$ potrebno je izraziti s u obliku $s = u''[x]$ koji treba vrijediti za bilo koju vrijednost h . Zbog toga zahtijevamo da svaki koeficijent uz različite stepene od h u izrazu $s - u''[x]$ bude jednak nuli. Na taj način dolazimo do algebarskog sistema jednačina pomoću kojeg određujemo koeficijente a, b, c u izrazu u_{xx} . Koeficijente uz u, u', u'', \dots izjednačavamo s nulom radi formiranja jednostavnijeg algebarskog sistema s neodređenim koeficijentima i korakom h .

Navedeni pristup čini osnovu metode neodređenih koeficijenata za konstrukciju aproksimacija konačnih razlika. Metodu primjenjujemo u softveru Mathematica.

```

In[3]:= s1 = s - u''[x]
Out[3]= a u[x] + b u[x] + c u[x] + h (a u'[x] - c u'[x]) - u''[x] +  $\frac{1}{2}$  h2 (a u''[x] + c u''[x])

In[4]:= derlist = Prepend[Union[Cases[{s1}, Derivative[_][u][x], -1]], u[x]]
Out[4]= {u[x], u'[x], u''[x]}

In[5]:= coefh = DeleteCases[Flatten[CoefficientList[s1, derlist]], 0]
Out[5]=  $\left\{-1 + \frac{a h^2}{2} + \frac{c h^2}{2}, a h - c h, a + b + c\right\}$ 

```

Slika 6. Primjena metode neodređenih koeficijenata za aproksimaciju konačnih razlika

Aproksimacija razlike za $u''(x_j)$ može se zapisati kao:

$$u''(x_j) = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}.$$

Najjednostavnija metoda za konstrukciju početnih i rubnih problema koji aproksimiraju početne i rubne probleme za PDJ se sastoji od zamjene parcijalnih derivacija odgovarajućim podijeljenim razlikama.

Zamijenimo vremensku derivaciju $\frac{\partial u}{\partial t}$ u (12) sa razlikom unaprijed

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau}$$

a prostornu derivaciju $\frac{\partial u}{\partial x}$ sa razlikom unatrag

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h}$$

U čvoru mreže (x_j, t_n) možemo napisati

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=x_j, t=t_n} \cong \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_j, t=t_n} \cong \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}, \quad (13)$$

Zamjenom izraza (4.2.1) u PDJ (4.1.2) za parcijalne derivacije, dobivamo

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (14)$$

$$u_j^0 = u_0(jh), \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (15)$$

Jednačina (14) se naziva jednačina konačnih razlika ili shema konačnih razlika ili diferencijska shema. Problem razlike (14) – (15) naziva se problem razlike početnih vrijednosti.

Jednačinu konačnih razlika (14) možemo dobiti i korištenjem softvera Mathematica:

```
In[11]:= eqn = Derivative[1][u][t] + a Derivative[1][u][x] == 0
Out[11]= u'[t] + a u'[x] == 0

In[12]:= eqn1 = eqn /. {u'[t] -> (u[j, n+1] - u[j, n]) / tau, u'[x] -> (u[j, n] - u[j-1, n]) / h}
Out[12]= 
$$\frac{a(-u[-1+j, n] + u[j, n])}{h} + \frac{-u[j, n] + u[j, 1+n]}{\tau} == 0$$

```

Slika 7. Dobivanje jednačine konačnih razlika

Fourierova analiza stabilnosti

Fourierova analiza ima izuzetno važnost u proučavanju tačnosti numeričkih metoda, jer omogućava detaljno ispitivanje njihovih osobina, uključujući preciznost aproksimacija, konvergenciju i greške (Morton i Mayers, 2005). Osim toga, igra ključnu ulogu u analizi stabilnosti ovih metoda, pružajući uvid u njihovo ponašanje kroz vremenske i frekvencijske domene, što je od posebne važnosti u primjenama kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina. Jednačina oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x, t), \quad -\infty < x < \infty \quad (16)$$

gdje je $\varphi(x, t)$ data funkcija, naziva se i funkcijom prisile, gdje je $|\varphi(x, t)| < \infty$ za $-\infty < x < \infty$.

Ova jednačina se može aproksimirati pomoću jednačine za konačnu razliku unaprijed:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \varphi(jh, n\tau) \quad (17)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, \dots, N$$

$$u_j^0 = u_0(jh), \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (18)$$

Razmatramo modifikovane početne probleme radi ispitivanja stabilnosti problema s obzirom na poremećaj δu_j^0 početnih podataka u_j^0 :

$$\underline{u}_j^0 = u_0(jh) + \delta u_j^0, \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (19)$$

Koristeći (19) dobiju se vrijednosti rješenja \underline{u}_j^n za $n = 1, 2, \dots, N$ izračunate metodom konačnih razlika koje zadovoljavaju jednačinu

$$\frac{\underline{u}_j^{n+1} - \underline{u}_j^n}{\tau} + a \frac{\underline{u}_j^n - \underline{u}_{j-1}^n}{h} = \varphi(jh, n\tau) \quad (20)$$

gdje je

$$\underline{u}_j^n = u_j^n + \delta u_j^n, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (21)$$

Zamijenimo sada (21) u (20) i oduzmimo (18) kako bismo dobili jednačinu

$$\frac{\delta u_j^{n+1} - \delta u_j^n}{\tau} + a \frac{\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (22)$$

uz zadani početni poremećaj δu_j^0 .

Definicija 2. Problem početne vrijednosti razlike (20), (21) naziva se stabilnim u odnosu na poremećaj početnih podataka, ako je uslov

$$\delta u^n \leq c \delta u^0 \quad (23)$$

zadovoljen za proizvoljnu ograničenu funkciju $u_j^0 = u_0(jh)$, gdje je c konstanta koja ne zavisi od h i τ .

Uslov (23) treba biti zadovoljen i za početni poremećaj oblika

$$\delta u_j^0 = e^{i\alpha jh}; \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (24)$$

gdje je α realni parametar. Rješenje problema (22), (24) ima oblik

$$\delta u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha jh} \quad (25)$$

gdje je $\lambda = \lambda(\alpha)$ određeno zamjenom izraza (25) u homogenu jednačinu (22)

$$\lambda(K, \varepsilon) = 1 - K(1 - e^{-i\varepsilon}) \quad (26)$$

gdje je $K = \frac{a\tau}{h}$ i $\varepsilon = \alpha h$.

Izraz (26) za $\lambda(\varepsilon)$ se naziva faktor pojačanja sheme konačnih razlika (22). Za rješenje (24) vrijedi jednakost

$$|\delta u_j^n| = |\lambda(K, \varepsilon)|^n |\delta u_j^0|$$

Nejednakost

$$|\lambda(K, \varepsilon)|^n \leq c, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (27)$$

je potrebna da bi uvjet (24) bio zadovoljen, a moguća je samo ako je

$$|\lambda(K, \varepsilon)| \leq 1 + c_1 \tau \quad (28)$$

gdje je c_1 konstanta koja ne ovisi od τ i h i treba biti zadovoljen za sve ε radi osiguravanja stabilnosti. Uvjet (28) se naziva Neumannovim potrebnim uvjetom stabilnosti.

U praktičnim analizama stabilnosti obično se pretpostavlja da je $c_1 = 0$ u (28).

Von Neumannov uvjet (28) trebao bi vrijediti također i za male pozitivne vrijednosti c_1 i τ pa možemo zahtijevati da je $|\lambda|^2 \leq 1$ i smatra se da je zadovoljen ako vrijedi

$$0 \leq K \leq 1 \quad (29)$$

Broj $K = \frac{a\tau}{h}$ se naziva Courantov broj. Uvjet (29) osigurava da zatvorena kriva koju čine tačke $(\text{Re}\lambda(K, \varepsilon), \text{Im}\lambda(K, \varepsilon))$ ostane unutar jedinične kružnice $|\lambda(K, \varepsilon)| \leq 1$ kompleksne ravnini.

Jednačina razlike za poremećaj δu_j^n koja se može dobiti iz (4.2.2) podudara se s jednačinom (22) pa je shema konačnih razlika (17) nestabilna za $a < 0$. Drugi naziv za navedenu metodu analize stabilnosti je Fourierova metoda ili spektralna metoda.

Primjer 2. Primjena metode konačnih razlika za ispitivanje Fourierove analize stabilnosti primjenom na transportnu jednačinu

```
uNumeric = Table[u0[i*dx], {i, 0, nx}];
```

```
Do[
```

```
  uNew = Table[
```

```
    uNumeric[[i]] - (a*dt)/(2*dx) (uNumeric[[i + 1]] - uNumeric[[i - 1]]),
```

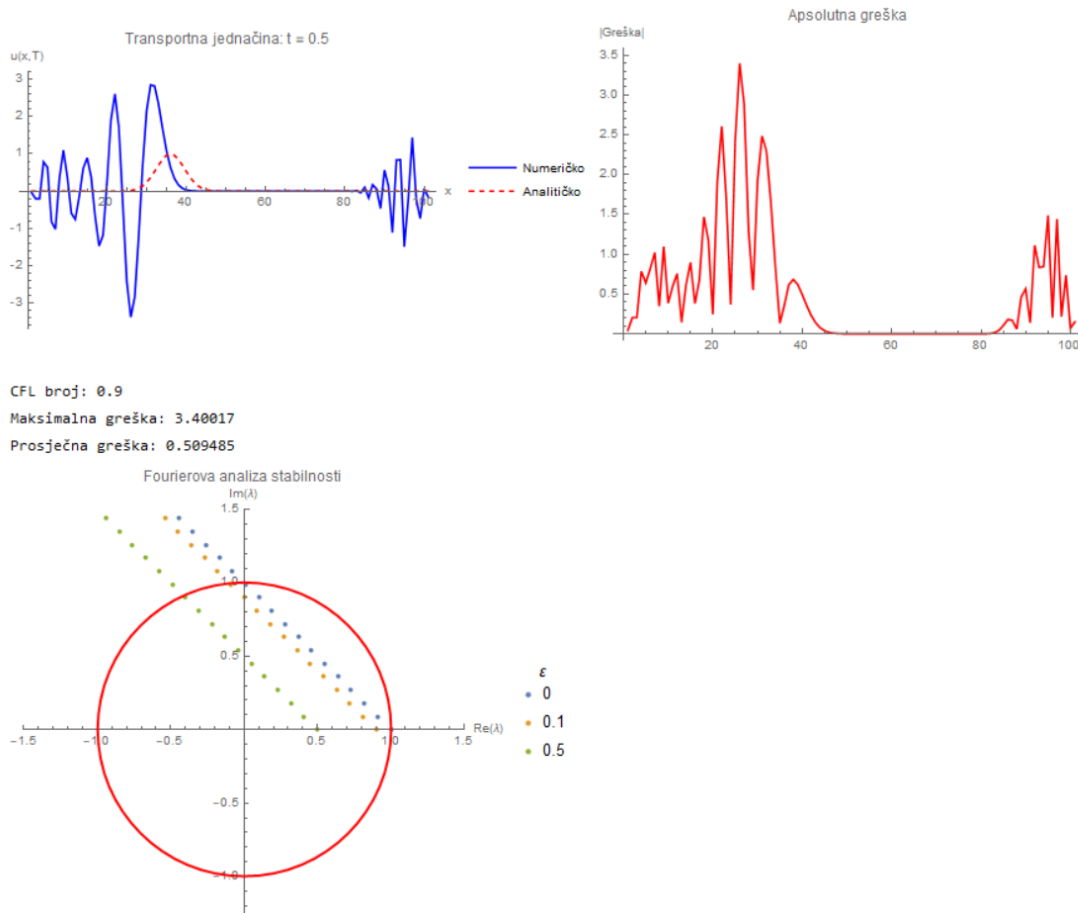
```
    {i, 2, nx}
```

```
  ];
```

```
(* Fourierova analiza stabilnosti *)
```

```
lambda[k_, eps_] := (1 - cfl*k - eps) + I*cfl*k;
```

Primjer 2. predstavlja implementaciju Fourierove metode koristeći softver Mathematica analizirajući rješavanje transportne jednačine koristeći metodu konačnih razlika. Transportna jednačina je hiperbolička jednačina prvog reda (po analogiji) jer rješenja imaju karakteristične linije duž kojih se prenosi informacija, a mogu postojati i diskontinuiteti (primjerice talasi). Kod uključuje vizualizaciju rješenja, analizu greške i provjeru stabilnosti kroz modificovane faktore pojačanja. Očekuje se da će rezultati potvrditi pretpostavke o stabilnosti i tačnosti metode konačnih razlika, kao i pružiti uvid u optimizaciju parametara za efikasno rješavanje PDJ-a.



Slika 8. Prikaz rezultata pri rješavanju transportne jednačine uz ispitivanje Fourierove analize stabilnosti

Rezultati implementacije pomoću metode konačnih razlika uspješno su prikazali evoluciju transporta u simuliranoj domeni. Iako je numeričko rješenje pokazalo određene greške u odnosu na analitičko rješenje, one su bile unutar prihvatljivih granica za CFL broj (0.9). Na temelju izvedene analize grešaka, maksimalna greška bila je 3.40017, dok je prosječna greška iznosila 0.509485.

Fourierova analiza stabilnosti ukazuje na to da je numerička metoda stabilna za odabrane vrijednosti parametra CFL, budući da su ϵ vrijednosti smještene i unutar i izvan jediničnog kruga u kompleksnoj ravnini. Ovo potvrđuje da metoda konačnih razlika zadovoljava uvjete stabilnosti za korištene parametre.

Općenito, metoda konačnih razlika se pokazala kao učinkovito sredstvo za rješavanje transportne jednačine u ovom slučaju, uz potrebnu pažnju na odabir parametra CFL kako bi se osigurala stabilnost i tačnost numeričkog rješenja.

Pojam konvergencije

Pojam konvergencije kod sheme konačnih razlika prema PDJ znači da rješenje jednačine konačnih razlika konvergira rješenju parcijalnih diferencijalnih jednačina pri $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$.

Teorem 2. *Neka je problem početne vrijednosti za PDJ dobro postavljen i neka problem početne vrijednosti razlike aproksimira problem početne vrijednosti za PDJ. Tada je stabilnost rješenja problema konačnih razlika početnih vrijednosti nužna i dovoljna za konvergenciju rješenja konačnih razlika rješenju problema konačnih razlika za datu PDJ.*

Iz tvrdnje ove teoreme o konvergenciji rješenja PDJ slijedi da shema konačnih razlika odabrana za rješenje primijenjenog problema treba imati svojstva aproksimacije i stabilnosti.

Jedan od načina za provjeru konvergencije je provjeriti tačnost numeričkog rješenja za zadane veličine koraka mreže τ i h usporedbom numeričkog rješenja s tačnim analitičkim rješenjem nekog problema.

Drugi način proučavanja konvergencije numeričkog rješenja sastoji se u tome da se označi sa $u(h_1, \tau_1)$ numeričko rješenje dobiveno za neku odabranu vrijednost $t > 0$, a neka $u(h_2, \tau_2)$ bude numeričko rješenje dobiveno pri manjim vrijednostima h i τ , npr. $h_2 = \frac{h_1}{2}, \tau_2 = \frac{\tau_1}{2}$.

Ako je razlika $|u(h_1, \tau_1) - u(h_2, \tau_2)|$ dovoljno mala u svim čvorovima (j) prostorne računalne mreže, npr. pogreška ne prelazi neku vrijednost ε , tada se može dati subjektivan sud o konvergenciji.

ZAKLJUČAK

Na osnovu provedenih numeričkih simulacija i analize metode konačnih razlika u softveru Mathematica pri rješavanju linearnih PDJ, može se zaključiti da je implementacija metode konačnih razlika pokazala visoku efikasnost, stabilnost i tačnost u zadanim uvjetima. Rezultati su potvrđeni poređenjem s analitičkim rješenjem, u nekim slučajevima kada postoje analitička rješenja odgovarajuće linearne PDJ.

Posebno je naglašeno da zadovoljavanje CFL uslova ima ključnu ulogu u osiguravanju stabilnosti numeričkih shema, čime se omogućuje konvergencija prema tačnom rješenju.

Grafičke vizualizacije su dodatno potvrdile tvrdnje o stabilnosti rješenja i konvergenciji, a posebno je istaknuta i važnost pravilnog izbora diskretizacijskih parametara (broj tačaka u prostoru i vremenu) kako bi se postigla željena preciznost.

Dakle, metoda konačnih razlika predstavlja moćan alat za numeričko rješavanje linearnih PDJ, a njezina efikasnost zavisi o poštivanju uslova stabilnost i te detaljnoj analizi pogrešaka i konvergencije.

LITERATURA

- [1] Andrei D. Polyanin et al. (2008). *Partial differential equation*. Scholarpedia, 3(10):4605
- [2] I. Demirdžić (2001). *Numerička matematika*, Univerzitet u Sarajevu.
- [3] D.M.Causon&C.G.Mingham (2010). *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*, Department of Computing and Mathematics, Manchester Metropolitan University, UK
- [4] Endre Suli (2021). *Numerical solution of partial differential equations*, Mathematical Institute, University of Oxford
- [5] K.W. Morton, David Mayers (2005). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press.
- [6] Mladen Jurak (2009). *Numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi*.
- [7] P.G. Martinsson (2008). *Fast numerical methods for solving linear PDEs*, The University of Colorado at Boulder.
- [8] Saša Krešić – Jurić (2014). *Parcijalne diferencijalne jednačbe*. Skripta–radna verzija, Prirodoslovno–matematički fakultet Sveučilište u Splitu
- [9] Seongjai Kim (2023). *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Department of Mathematics and Statistics Mississippi State University
- [10] Steffen Börm (2020). *Numerical Methods for Partial Differential Equations*.
- [11] Sussane Brenner and L.Ridgway Scott (2008). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, New York

NUMERICAL SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATIONS BY FINITE DIFFERENCE METHOD USING MATHEMATICA SOFTWARE

Abstract

Partial differential equations (PDEs) play an important role in modeling numerous natural phenomena and technical processes. These equations most often describe how physical quantities such as temperature, pressure, density, and electromagnetic fields change in space and time. Analytical solution of PDEs is not always possible, which requires the use of various numerical methods that allow the determination of so-called approximate solutions.

The paper hypothesizes the efficiency of the finite difference method within the Mathematica software. This includes numerical analysis with analytical solutions, convergence study, and evaluation of computational complexity. Special emphasis is placed on the expected contributions in terms of optimization of the method parameters and development of practical guidelines for solving PDEs in real applications.

A detailed overview of PDJs is given, starting with their mathematical classification according to characteristics (elliptic, parabolic, and hyperbolic). Classical problems with fixed initial and boundary conditions and problems with variable boundaries are considered.

The main part of this paper consists of the implementation of the finite difference method in Mathematica. Finite difference schemes for each type of PDJ are analyzed in detail, including explicit and implicit approximations. The influence of network parameters on the stability and accuracy of solutions is examined.

The final part of this paper emphasizes the advantages of Mathematica software in increasing researcher productivity through the integration of computational, symbolic, and visualization components. The limitations of the method and software environment are discussed, indicating that a combination with other numerical methods can result in more accurate and faster solutions.

Keywords: *linear partial differential equations, finite difference method, one-dimensional wave equation, Mathematica software.*