

Almir Huskanović  
Hermina Alajbegović  
Safet Hamedović

## PRIMJENA TEORIJE GRAFOVA U GEOMETRIJI

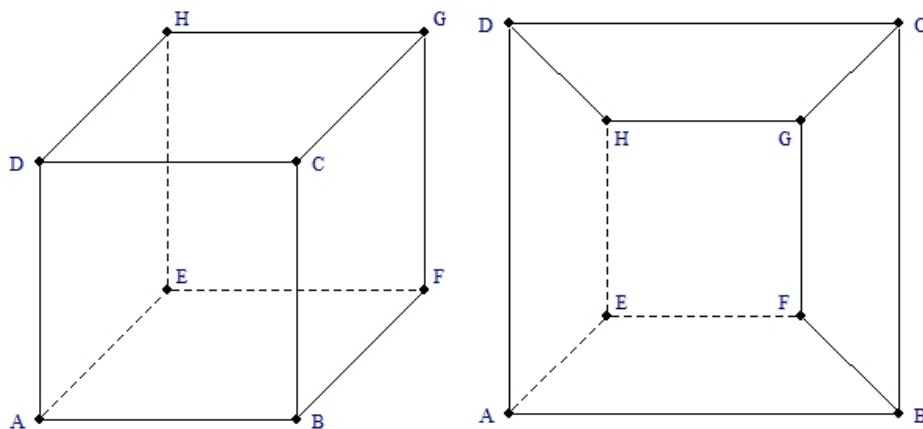
### Sažetak

*U ovom radu ćemo pomoću planarnih grafova napraviti klasifikaciju pravilnih poledara i vidjeti još neke mogućnosti primjene grafova u geometriji.*

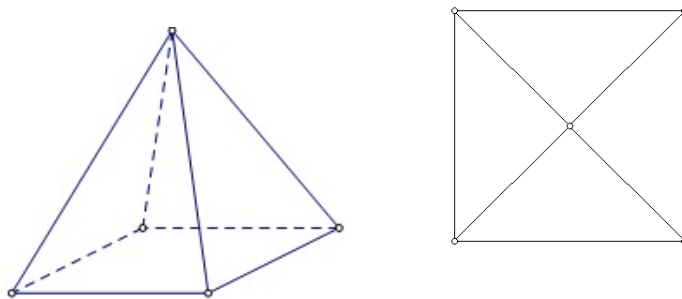
**Ključne riječi:** teorija grafova, planarni graf, pravilni poliedri

### 1. PLANARNI GRAFOVI

Elementi teorije grafova se nekad mogu iskoristiti da bi se dokazale neke tvrdnje u geometriji. Npr. kad radimo sa poliedrima, za svaki poliedar  $P$  može se dobiti planarni graf  $G(P)$  pomoću stereografske projekcije (v. [2]). Na slici 1 vidimo kako bi se dobio jedan graf od kocke.



Slika 1.



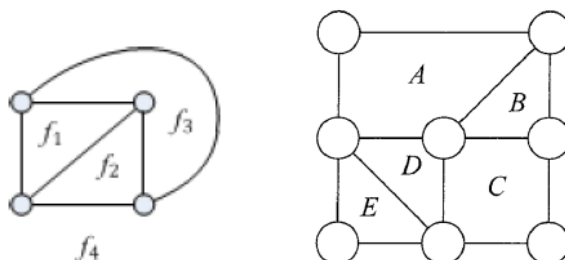
Slika 2.

Slika 2: Četverostranoj piramidi odgovara graf zvani „točak“ sa 5 vrhova.

Inače, planarni graf se definiše kao graf koji se može nacrtati u ravni tako da mu se ivice ne sijeku, osim u vrhovima grafa. S druge strane, pravilni poliedar je poliedar kod koga su sve strane međusobno podudarni pravilni mnogouglovi, tako da iz svakog njegovog vrha izlazi jednak broj ivica.

Pretpostavimo da imamo proizvoljni pravilni poliedar i da je  $l$  broj ivica svakog od mnogouglova koji ograničavaju taj poliedar, a da je  $k$  broj ivica koje izlaze iz svakog od njegovih vrhova.

Švicarski matematičar Leonhard Euler (1707.-1783.) je 1750. godine našao formulu koja važi za sve konveksne poliedre:  $n - m + f = 2$ , pri čemu je  $n$  –broj vrhova poliedra,  $m$  –broj ivica poliedra i  $f$  –broj strana poliedra. Istu formulu je poznati francuski matematičar Augustin Louis Cauchy (1789.-1857.) primijenio i na grafove, s tim da je  $n$  –broj vrhova grafa,  $m$  –broj ivica grafa, a i  $f$  –broj oblasti u ravni koje su određene ivicama grafa. Međutim, Eulerova formula važi samo za povezane planarne grafove.



Slika 3.

**Primjer 1:** Na slici 3. (prva slika) imamo graf (kompletni graf  $K_4$ ) kod koga je  $n = 4, m = 6, f = 4$ . Na drugoj slici je  $n = 8, m = 12, f = 6$ . Očito je u oba slučaja zadovoljena jednakost  $n - m + f = 2$ .

**Napomena 1:** Primjetimo da su kod prvog grafa sve oblasti  $f_i$  ograničene sa 3 ivice, dok je kod drugog grafa broj ivica koje ograničavaju oblasti 4, 3, 4, 3, 3, 7. Sabiranjem dužina granica oblasti dobija se kod svakog planarnog grafa dvostruki broj ivica, zato što svaka ivica grafa ograničava dvije oblasti. Ako Označimo sa  $\mathcal{F}$  skup svih oblasti u tom grafu i za proizvoljnu oblast  $F \in \mathcal{F}$  posmatramo skup  $E_F = \{e \in E | e \text{ je granica oblasti } F\}$ , tj. skup svih ivica datog grafa koje ograničavaju oblast  $F$ , tada možemo pisati da je

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} |E_F| = 2m.$$

Takođe, poznato je da je zbir svih stepena vrhova u bilo kom neorjentisanom grafu jednak dvostrukom broju ivica, tj.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

Osim navedenih formula, u oblasti planarnih grafova se često koristi tvrdnja da je

$$\frac{3f}{2} \leq m \leq 3n - 6.$$

(vidi [ 2], [3])

## 2. PRVI PROBLEM

Iskoristit ćemo planarne grafove da dokažemo da postoji samo 5 vrsta pravilnih poliedara.

Pošto je  $k$  broj ivica koje izlaze iz svakog vrha pravilnog poliedra  $P$ , planarni graf  $G(P)$  je  $k$  –regularan. Sabiranjem stepena svih vrhova tog grafa dobijamo da je:

$$kn = 2m \quad (1)$$

Osim toga, prema Napomeni 1, sabiranjem dužina granica svake oblasti grafa  $G(P)$  dobit ćemo da je

$$lf = 2m \quad (2)$$

Iz formula (1) i (2) slijedi:  $n = \frac{2m}{k}$  i  $f = \frac{2m}{l}$  a zatim iz Ojlerove formule  $n - m + f = 2$  bi dobili da je

$$\frac{2m}{k} - m + \frac{2m}{l} = 2 \Leftrightarrow m \left( \frac{2}{k} + \frac{2}{l} - 1 \right) = 2 \quad (3)$$

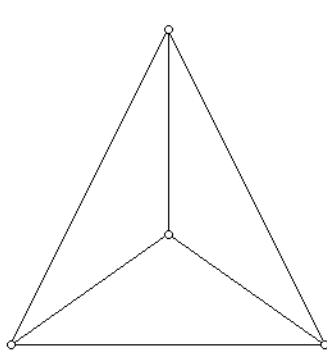
iz čega slijedi:

$$\frac{2}{k} + \frac{2}{l} - 1 > 0 \Leftrightarrow 2(k + l) > kl \Leftrightarrow (k - 2)(l - 2) < 4.$$

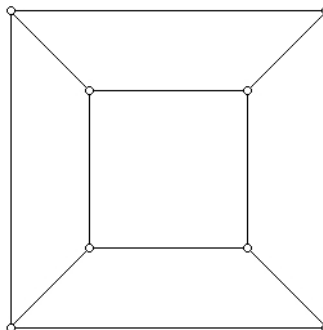
S obzirom na značenje brojeva  $k$  i  $l$  jasno je da je  $k \geq 3$  i  $l \geq 3$ , što nas dalje vodi do slučajeva:

$$1) \quad k = 3 \Rightarrow l < 6.$$

Za  $k = l = 3$ , slijedi iz (3) da je  $m = 6$ , a zatim iz (1) i (2):  $n = 4$  i  $f = 4$ . Tu se radi o pravilnom tetraedru, koji je ograničen sa 4 jednakostranična trougla. (sl. 4).



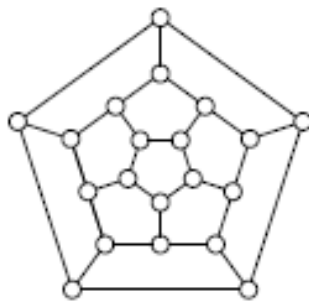
Slika 4.



Slika 5.

Za  $k = 3$ ,  $l = 4$  analogno se dobije  $m = 12$ ,  $n = 8$ ,  $f = 6$  – poliedar ograničen sa 6 kvadrata, to je kocka (sl. 5.).

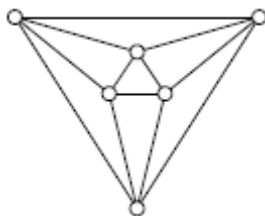
Za  $k = 3$ ,  $l = 5$  dobije se  $m = 30$ ,  $n = 20$ ,  $f = 12$  – poliedar ograničen sa 12 pravilnih petouglova, to je pravilni dodekaedar (sl. 6.).



Slika 6.

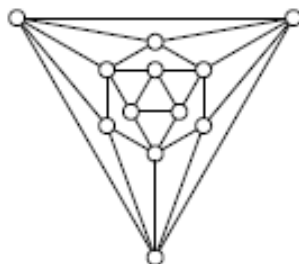
$$2) \quad k = 4 \Rightarrow l < 4$$

Moguće je samo da bude  $l = 3$ . Dalje slijedi:  $m = 12$ ,  $n = 6$ ,  $f = 8$  – poliedar ograničen sa 8 jednakostraničnih trouglova, dakle pravilni oktaedar (sl. 7.).



Slika 7.

- 3)  $k = 5 \Rightarrow l = 3 \Rightarrow m = 30, n = 12, f = 20$  – poliedar ograničen sa 20 jednakokraničnih trouglova, pa je to pravilni ikosaedar (sl. 8.).



Slika 8.

### 3. DRUGI PROBLEM

Dokazati tvrdnju: U svakom konveksnom poliedru postoji ili strana koja je trougao ili vrh u kome se sastaju tri ivice.

Rješenje: Pretpostavimo da imamo konveksni poliedar  $P$  takav da mu nijedna strana nije trougao. Za odgovarajući graf  $G(P)$  to znači da on nema cikluse dužine 3, tj. najmanji njegov ciklus je dužine 4, pa je zato (uz standardne oznake  $m, n, f$  kao u prvom paragrafu):

$$2m = \sum_{F \in \mathcal{F}} |E_F| \geq \sum_{F \in \mathcal{F}} 4 = 4 \cdot |\mathcal{F}| = 4f \Rightarrow 2f \leq m$$

i onda pomoću formule  $n + f = m + 2 \Rightarrow 2n + 2f = 2m + 4$  dobijemo:

$$2m + 4 \leq 2n + m \Rightarrow m \leq 2n - 4.$$

Jasno je da iz svakog vrha poliedra polaze barem 3 ivice. To znači da je u grafu  $G(P)$ :  $\delta(G) \geq 3$ , pri čemu je  $\delta(G)$  najmanji od svih stepena vrhova tog grafa. Dokažimo da ne može biti  $\delta(G) \geq 4$ . Naime,

$$2m = \sum_{v \in V} d(v) \leq 4n - 8 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v) \leq 4 - \frac{8}{n} < 4$$

što znači da je aritmetička sredina stepena svih vrhova datog grafa manja od 4, pa je  $\delta(G) < 4$ , tj.  $\delta(G) = 3$ . Drugim riječima, ako u planarnom grafu nema ciklusa dužine 3 on mora imati barem jedan vrh stepena 3.

#### 4. TREĆI PROBLEM

Dokazati tvrdnju: U svakom konveksnom poliedru postoje barem 4 vrha iz kojih polaze 3, 4 ili 5 ivica.

Rješenje: Označimo sa  $n_i$  broj vrhova planarnog grafa  $G(P)$  koji imaju stepen  $i, i \geq 3$ . Tada je

$$3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots = 2m \leq 2(3n - 6)$$

i otuda

$$3(n_3 + n_4 + n_5) + 6(n_6 + n_7 + \dots) \leq 6n - 12,$$

tj.  $(n_3 + n_4 + n_5) + 2(n_6 + n_7 + \dots) \leq 2n - 4$ .

Ako još uzmemo u obzir da je  $n = (n_3 + n_4 + n_5) + (n_6 + n_7 + \dots)$ ,

poslije kraćeg računa dobija se da je  $n_3 + n_4 + n_5 \geq 4$ .

Iz toga slijedi tražena tvrdnja.

#### 5. ČETVRTI PROBLEM

Konveksni poliedar je ograničen samo trouglovima i ima 52 vrha. Koliko taj poliedar ima ivica i strana?

Rješenje: Posmatrajmo graf  $G$  koji odgovara datom poliedru. Taj graf je maksimalni planarni graf, tj. graf koji je planaran i koji neće biti planaran ako mu dodamo jednu ivicu. Sve oblasti takvog grafa su trouglovi i ima maksimalni broj ivica, tj.  $m = 3n - 6$  ako je  $n$  broj vrhova.

Otuda,  $n = 52 \Rightarrow m = 150$ , a po Eulerovoj formuli je  $f = m + 2 - n = 100$ , pa zaključujemo da dati poliedar ima 150 ivica i 100 strana.

## 6. ZAKLJUČAK

Teorija grafova, kao jedna od mlađih matematičkih disciplina (nastala u 18. vijeku) može da bude od koristi kod rješavanja problema iz geometrije kao najstarije matematičke oblasti. Rezultati koje dobijamo u geometriji pomoću planarnih grafova su veoma zanimljivi, a vrlo često se ti rezultati dobijaju puno teže korištenjem samo geometrijskih metoda.

## 7. LITERATURA

- [1] A. Huskanović, H. Alajbegović: **Diskretna matematika**, Politehnički fakultet Univerziteta u Zenici, 2020., COBISS.BH-ID 29065990
- [2] D. Stevanović, V. Baltić, S. Simić, M. Ćirić: **Diskretna matematika**, DMS, ISBN 978-86-81453-68-1, Beograd 2008.
- [3] D. B. West: **Introduction to Graph Theory**, ISBN 81-7808—830-4, University of Illinois, Urbana 2002.

## APPLICATION OF GRAPH THEORY IN GEOMETRY

### Abstract

*In this paper, we will use planar graphs to make a classification of regular polyhedra and see some other possibilities of applying graphs in geometry.*

**Key words:** *graph theory, planar graph, regular polyhedral*